P O I É S I S – REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – MESTRADO – UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

UNISUL, Tubarão, v. 5, n.9, p. 280 - 299, Jan./Jun. 2012. By Zumblick

A CONCEPÇÃO DE ÁLGEBRA NA PROPOSIÇÃO DE DAVYDOV PARA O ENSINO DE NÚMERO[1]

Ademir Damazio[2]
Josélia Euzébio da Rosa[3]
Ledina Lentz Pereira[4]
Elaine Vieira Banhara[5]

RESUMO

Historicamente, a educação escolar estabeleceu a separação entre a aritmética, a álgebra e geometria, o que propiciou movimentos que culmina com a unificação: a Matemática. Porém, as proposições curriculares não traduzem a inter-relação entre esses três campos. O presente estudo afilia-se a Davydov e colaboradores ao adotar o pressuposto de que o ensino de matemática, desde o primeiro ano escolar, deve trazer a ideia de número real, a partir do estudo das grandezas na inter-relação entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas. O problema de pesquisa volta-se para a concepção de álgebra nas proposições de Davydov para a introdução do ensino do conceito de número. Para tanto, estabelece-se um diálogo com a literatura referente à concepção de álgebra e a proposição davydoviana. Ao contemplar a relação geral entre as grandezas, Davydov traz componentes da concepção de álgebra como o estudo de relação entre grandezas que variam.

Palavras- chave: Educação Matemática. Concepção. Álgebra. Ensino. Davydov. Número.

THE CONCEPTION OF ALGEBRA IN DAVYDOV'S PROPOSITION FOR TEACHING NUMBERS

ABSTRACT

Historically, schooling has established the separation of arithmetic, algebra and geometry, which led movements that culminate in the unification: Mathematics. Nevertheless, curricular propositions do not reflect the interrelationship between these three fields. In this study, it's been affiliated to Davydov and colleagues, in adopting the assumption that the teaching of mathematics, from the first school year, should bring the idea of the real number, from a study of quantities in the inter-relation between arithmetic, algebraic and geometric meanings. The research problem goes back to the conception of the algebra, in Davydov's propositions for the introduction of teaching the concept of number. To do so, a dialogue is established with literature concerning the concept of algebra and

---

[1]Fontes Financiadoras**:** FAPESC. CNPq. PIBIC/UNAHCE/UNESC.

[2]UNESC – Universidade do Extremo Sul Catarinense. add@unesc.net. Programa de Pós-Graduação em Educação - Mestrado em Educação. Av. Universitária, 1105. Bairro Universitário. Criciúma, SC. C.P. 3167. CEP: 88806-000.

[3]UNISUL – Universidade do Sul de Santa Catarina. joselia.euzebio@yahoo.com.br. Programa de Pós-Graduação em Educação - Mestrado em Educação. Avenida José Acácio Moreira, 787. Bairro Dehon. Tubarão – SC. CEP: 88704-900.

[4]UNESC – Universidade do Extremo Sul Catarinense. llp@unesc.net. Av. Universitária, 1105. Bairro Universitário. Criciúma, SC. C.P. 3167. CEP: 88806-000.

[5]UNESC – Universidade do Extremo Sul Catarinense. elaine.banhara@hotmail.com. Laboratório de Estudos em Educação Matemática Prof. Dr. Ademir Damazio. Av. Universitária, 1105. Bairro Universitário. Criciúma, SC. C.P. 3167. CEP: 88806-000.

davydovian proposition. In contemplating the general relationship between quantities, Davydov's proposal brings components of the conception of algebra as the study of relationships between quantities that vary.

Keywords: Conception. Algebra. Education. Davydov. Number.

INTRODUÇÃO

Um olhar para as proposições curriculares brasileiras – por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) e a Proposta Curricular de Santa Catarina (1998) – é possível identificar uma organização do ensino que privilegia a distinção entre os conteúdos referentes à aritmética, à álgebra e à geometria. Por se tratar de orientações oficiais, oriundas dos órgãos governamentais, são referências para os autores de livros didáticos e professores. Como decorrência, surge a hipótese de que o ensino nas escolas públicas tem como uma de suas características a tricotomia entre os campos da Matemática. Isso significa dizer que há um momento específico para ensinar conteúdos curriculares da aritmética, outro para a álgebra e também para a geometria. Dadas às condições objetivas e circunstanciais oriundas das relações sociais e econômicas, tem ocorrido a prioridade para um desses ramos em detrimento dos demais, como mostra a literatura científica concernente à temática. Por exemplo, Pavanello (1989) diz que existe um "abandono" da geometria consequência da intensificação para a aritmética. Por sua vez, Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) perguntam: "Álgebra ou geometria, para onde pende o pêndulo?"

Tal estrutura traz reminiscências históricas da organização curricular, predominante até os anos 1900, pois cada campo era considerado disciplina isolada, com peculiaridades independentes umas das outras e com caráter ideológico discriminatório. Segundo Fiorentini (1995), as classes economicamente inferiores instruíam-se apenas com a Aritmética, que também era estudada pelos filhos das elites, acrescida da Álgebra e, principalmente, da Geometria.

No entanto, no decorrer do século XX, se intensificam os movimentos – na Pedagogia e no interior da própria Matemática – com a finalidade de promover oportunidades de acesso aos conhecimentos sistematizados cientificamente, por parte de um número maior número de pessoas, independentemente, de classes sociais. Nesse contexto, do que se pode denominar de busca da 'melhoria da qualidade do ensino', está a preocupação com a unificação da Aritmética, da Álgebra e da Geometria, para constituírem-se em única disciplina, a Matemática.

Cita-se entre outras, no âmbito da Pedagogia, conforme Fiorentini (1995) e Miranda (2003), o Movimento da Escola Nova – surgido nos Estados Unidos – que influenciou decisivamente a fusão das referidas disciplinas, por parte de Euclides Roxo, em sua proposta para o ensino de Matemática no Colégio Pedro II do Rio de Janeiro, que se estendeu à Reforma, em nível Nacional, de Francisco Campos, em 1931.

A mesma unificação também é proposta pelo Movimento da Matemática Moderna, de âmbito internacional, que se apresentou como base na organização dos Programas de Ensino de vários Estados brasileiros, como por exemplo, Santa Catarina (1998), que trouxe a concepção fundamentalista dessa nova proposição. No entanto, de acordo com Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 45), a referida unificação não ocorreu por simples integração dos campos de conhecimento em referência, nem por extinção ou inclusão de determinados conceitos, mas "pela introdução de elementos unificadores tais como a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas e as relações que, acreditava-se, constituiriam a base para a construção lógica do novo edifício matemático".

Mas esses movimentos não se traduziram em propostas efetivas e com a solidez necessária para atingir a finalidade dos avanços na qualidade do ensino e da aprendizagem da Matemática. Críticas e questionamentos a eles relacionados se apresentaram nos meios escolares e científicos. Por exemplo, os riscos de levar os estudantes ao espontaneismo (FIORENTINI, 1995) e da ênfase ao desenvolvimento apenas do pensamento empírico (DAVÝDOV, 1982), por parte das proposições escolanovistas. Da mesma forma, é anunciado o "fracasso do Movimento da Matemática Moderna" (KLINE, 1976), que é amenizada por Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), bem como por Búrigo (2010).

Contudo, nos currículos brasileiros referentes à Educação Básica, só existe a disciplina de Matemática, isto é, não se voltou à organização com Aritmética, Álgebra e Geometria. No entanto, mesmo unificadas, elas se apresentam distintamente no momento do ensino e seguem, com raríssimas exceções, o seguinte movimento em relação aos conceitos: aritméticos → geométricos → algébricos (ROSA, 2012). Os Parâmetros Curriculares Nacionais para as séries finais do Ensino Fundamental também lançam críticas à compartimentação da matemática escolar em áreas distintas, bem como a ideia de conteúdos previamente estabelecidos em sequência. Em contrapartida, expressam preocupação com o desenvolvimento do pensamento algébrico e com o uso não hierarquizado das representações algébricas como forma de atingir o nível das generalizações ou de traduzir situações-problema (BRASIL, 1998). Mesmo com tal orientação, paradoxalmente, os PCNs apresentam uma organização do ensino para o primeiro ciclo do ensino fundamental que prioriza os conceitos eminentemente aritméticos, voltados basicamente para os números naturais e operações. Os conceitos algébricos são indicados para os ciclos ou séries finais. Desse modo, pode-se dizer que não há um retorno à tradição do passado de distintas disciplinas e que pedagogicamente ainda ocorre um tratamento tricotômico.

Do mesmo modo, conforme Santos (2007), os livros didáticos brasileiros apresentam a álgebra simplificadamente, não proporcionam os subsídios necessários, tanto ao professor quanto ao estudante, para um consequente ensino e aprendizagem da mesma. Santos (2007), Búrigo (2010) e Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) se referem aos livros didáticos como o principal recurso didático do professor. Porém, fazem dupla restrição a eles: por enfocarem os conteúdos algébricos somente nos três últimos anos do ensino fundamental; e por desconsiderarem os condicionantes sociais, lógicos e de desenvolvimento mental dos estudantes. Dão ênfase aos procedimentos didáticos que proporcionam a memorização mecânica com base em “macetes” e regras.

Nesse sentido, vale reportar a Lins e Gimenez (1997) ao dizerem que, aprender aritmética antes da álgebra é um dos feitos mais enraizados, em Educação Matemática. No entanto, os autores discordam dessa forma de entender a organização do ensino da Matemática e advogam em favor do desenvolvimento curricular da álgebra, desde cedo, e de forma inter-relacionada com a aritmética.

A não tricotomitização entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas dos conceitos tem se constituído em objeto de estudo do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural (GPEMAHC)[6]. No entanto, atualmente, o Grupo centra-se em estudos referentes à proposta de ensino de matemática desenvolvida por Davydov e seus colaboradores, no contexto da Psicologia Pedagógica russa. A referida

[6]Vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Educação da UNESC e cadastrado no Diretório de Grupos do CNPq. Integram o grupo pesquisadores de duas universidades: UNESC e UNISUL

proposta é base do presente texto, mais especificamente o seu pressuposto de que, mesmo no primeiro ano escolar, o estudante deve iniciar seus estudos de matemática pela ideia de número real, a partir do estudo das grandezas discretas e contínuas (DAVÝDOV, 1982). Observa-se – no panorama desenhado anteriormente, sobre a permanência da separação entre aritmética, álgebra e geometria – que o referido pressuposto davydoviano é antagônico aquele que predomina, atualmente, na educação matemática brasileira que estabelece como referência inicial de ensino o número natural com teor eminentemente aritmético, por priorizar a contagem de quantidades discretas (ROSA, 2012 e DAMAZIO, ROSA e EUZEBIO, 2012).

Também se constitui em argumento para justificar o presente estudo a afirmação de Davýdov (1982) que sua proposição para a organização de ensino é promissora em relação à superação da dicotomia entre a aritmética e a álgebra. Contribui ainda mais a seguinte afirmação: "a proposta de Davydov, em vez de minimizar o divórcio entre as significações aritméticas e algébricas, como o próprio autor anuncia em seus escritos, não permite tal distanciamento, além de incluir a geometria" (ROSA, 2012, p. 228).

Como decorrência, o problema de pesquisa traduz-se na seguinte questão: qual a concepção de álgebra nas proposições de Davydov para a introdução do ensino do conceito de número? Em termos de objetivo do estudo a pretensão foi analisar a proposta de Davydov e colaboradores para o ensino do conceito de número, no primeiro ano do ensino fundamental, com o foco para a concepção de álgebra que nela se apresenta.

Por suas caraterísticas, no processo de análise, o estudo é definido como pesquisa qualitativa na modalidade bibliográfica, uma vez que estabelece diálogo entre a literatura referente à concepção de álgebra e os livros que dizem respeito ao processo de ensino do conceito de número na perspectiva davydoviana. Para tanto, as referência estudadas, analisadas, dadas as suas especificidades, se constituíram em dois grupos. O primeiro, sobre álgebra, centra-se em um artigo de periódico (FIORENTINI, MIGUEL e MIORIN, 1993), um capítulo de livro (USISKIN, 1994) e um livro (LINS e GIMENES, 1997). O segundo, sobre a proposta de Davydov, compõe-se de dois livros: um livro didático (ДАВЫДОВ et al, 1997) e outro que traz as orientações metodológicas ao professor (ГОРБОВ et al, 2008). Vale esclarecer que as obras de Davydov, indicadas em língua russa, compõem o acervo bibliográfico do GPEMAHC, bem como a tradução para o português, realizada por Elvira Kim, professora do centro de idiomas da Universidade Federal do Paraná.

ÁLGEBRA: HISTÓRIA E CONCEPÇÕES

A palavra álgebra, conforme Eves (1995), tem origem arábica no termo al-jabr, com o significado de restauração ou reunião. Os babilônios e os egípcios, por volta de 1.700 a. C., estiveram envoltos com regras para resolução de problemas e cálculos, porém, não são expressas em uma linguagem simbólica própria e genérica, como a concebida na atualidade. Nem mesmo entre os gregos, os problemas com teor algébrico eram desenvolvidos com a tradução para procedimentos com componentes simbólicos. Em vez de letras para indicar quantidades desconhecidas, adotavam-se figuras geométricas planas.

Isso significa dizer que, como toda produção humana, a linguagem algébrica tem um desenvolvimento marcado por períodos de uma determinada compreensão que se firma, estagna, entrecruza e se supera. Notadamente, conforme Eves (1995), identifica-se três fases do processo que culminou com o modo linguístico que caracteriza a álgebra atual. A primeira, a “linguagem retórica” como, por exemplo, a adotada no seguinte problema de equação do segundo grau: *Toma a metade de 1 que é 0,5 e multiplica 0,5 por 0,5, que é 0,25. Soma este número a 870, o que dá 870,25. Nas tabelas, comprovamos que este é o quadrado de 29,50. Soma 0,5 a 29,5 e o resultado é 30, o lado do quadrado.* Não há, pois, abreviações de palavras e uso de letras para indicar possíveis quantidades desconhecidas.

A segunda, linguagem sincopada, em que se confluem a linguagem corrente, as abreviações de palavras e numerais. Não ocorre, ainda, o emprego de expressões literais para a representação na forma genérica de determinada situação-problema. De acordo com Eves (1995), tal linguagem tem suas primeiras manifestações, no século III, por Diofanto, que representava a incógnita pela letra ς, uma variante da letra grega σ (sigma). Além disso, adotava nomes para indicar os expoentes da incógnita, tais como: quadrado, cubo, quadrado-quadrado (quarta potência), quadrado-cubo (quinta potência) e cubo-cubo (sexta potência).

Também é representativo dessa fase a notação do grupo algebrista italiano, como Cardano por volta de 1545 e Bombelli, por volta, 1572 do qual toma-se o exemplo de notação, $I^6 \cdot P \cdot 8\, I^3$ *Eguale a 20*, que traduzida para atualidade é escrita como $x^6 + 8x^3 = 20$. Para Babini (1967), o único progresso importante realizado desde a época dos babilônicos, só ocorreu no século XVI, pelos matemáticos italianos, que foi a resolução algébrica das equações de terceiro e quarto graus.

Como decorrência do estudo desses e outros contemporâneos, o francês Viète adota a linguagem algébrica sincopada, porém, com progressos na notação ao adotar as vogais para representar a incógnita e as consoantes para os coeficientes ou quantidades conhecidas. Um ecletismo entre o modo retórico e sincopado é encontrado nos escritos de Kepler, Galileo, Torricelli, Cavalieri, Pascal, Fermat, Napier, Briggs e outros que adotavam palavras como: *aequales, esgale, faciunt, gheljck* e a abreviatura *aeq*.

Vale observar a lentidão em relação às notações de Diofanto, o que não foi diferente com os símbolos designativos das operações matemáticas que, em determinado momento, os algebristas adotaram as letras *p* e *m,* iniciais das palavras latinas *plus* e *minus* para representar, respectivamente, a adição e a subtração.

A terceira fase, simbólica, tem suas primeiras manifestações com Viète que adotara os sinais operativos + e –, também, como dito anteriormente, a utilização de letras para incógnitas e coeficientes das equações. Destaca-se, ainda, a contribuição de Robert Recorde, em 1557, que usara o símbolo = para a igualdade, com a justificativa de que "não pode haver duas coisas mais iguais que um par de retas paralelas".

A notação – comumente adotada na atualidade – de usar as primeiras letras do alfabeto (a, b, c, ...) para as quantidades conhecidas ou coeficientes de uma equação e as últimas (w, x, y e z) para as incógnitas foi adotada por Descartes (1596-1650). Assim como Viète, isso ocorria somente para os números positivos. Tal representação, de forma indistinta para números positivos e negativos, deve-se a John Huddle, em 1637. Constitui-se como o último estágio, em relação à notação, o uso de uma letra para indicar o grau de uma equação. A atual notação de expoentes negativos e fracionários foi adotada Newton (1676).

Lins e Gimenes (1997) consideram como avanço notável no desenvolvimento da álgebra, ocorrido entre 1811 e 1940, o conceito de estrutura algébrica consequência dos estudos de Galois, depois por Abel e, posteriormente, por Bourbaki. Com isso, atinge-se a plena abstração e a álgebra se torna totalmente independente da aritmética e da geometria.

O processo de constituição da linguagem algébrica, que também traduz níveis distintos do pensamento algébrico, tem dirimido dúvida em relação ao surgimento da álgebra. De acordo com Eves (1995), há quem atribui a Diofanto pelo seu feito de evitar o estilo da álgebra geométrica, ao introduzir um símbolo para a incógnita e algumas abreviações na resolução de problemas e operações. Em outras palavras, suas notações são o marco que caracteriza a passagem da álgebra retórica para a sincopada.

No entanto, conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Jacob Klein considera Viète o fundador da álgebra por atribuir um novo caráter à letra, em relação a Diofanto, que a adotava somente para representar quantidades desconhecidas em uma equação. A sua originalidade está na sutileza e profundidade da designação de papéis distintos aos símbolos, ao adotar as vogais para representar os coeficientes e as incógnitas por constantes.

> A sutileza e profundidade dessa nova forma de conceber o símbolo e, consequentemente, de expressar as equações em grau maior de generalidade, podem ser percebidas nas implicações que trouxe para o desenvolvimento do pensamento algébrico. De fato, essa forma de expressar equações possibilitou que se trabalhasse não apenas com equações particulares com coeficiente numérico, como ocorria até então, mas, sobretudo, que se trabalhasse com classe de equações (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993, p. 81).

Nesse movimento histórico também se apresentam concepções distintas de álgebra, direcionadoras do modo de organização do seu ensino que, consequentemente, desenvolvem um determinado tipo de pensamento algébrico nos estudantes. Investigações de diversas áreas de conhecimento apontam a identificação dessas concepções, porém, para efeito do presente estudo adota-se: Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Usiskin (1994). Cada uma delas é apresentada, pelos respectivos autores, de forma objetiva, o que não deixa de oferecer elementos das principais ideias que as caracterizam.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) identificam e distinguem quatro concepções. A primeira denominada de "processológica" por entender a Álgebra como constituída unicamente de procedimentos padronizados – técnicas algorítmicas – para tratar determinadas situações problemas. Não é provida de uma linguagem exclusiva como, por exemplo, a retórica devido a sua insubordinação a um pensamento peculiar.

A segunda concepção, linguístico-estilística, como sugere o próprio nome tem a Álgebra como uma linguagem própria, criada de forma artificial, com objetivo de expressar de forma abreviada os seus procedimentos específicos. Estabelece clara distinção entre a representação simbólica e as significações caracterizadoras do pensamento algébrico que não se basta em si, mas pela sua expressão em linguagem.

Linguístico-sintático-semântica é a denominação da terceira concepção que tem certa similaridade com a anterior por priorizar uma linguagem particular e precisa. Porém, impõe mais rigor por estabelecer como condição necessária para a existência de um pensamento algébrico autônomo a consciência de uma linguagem própria. Além disso, é necessária a consciência de que a aquisição da dimensão operatória e a revelação do seu poder de transformação e instrumental requerem um *status* e um estágio superior de uma linguagem simbólica. Seu poder criativo e instrumental não ocorre no campo linguístico, mas em seu domínio sintático-semântico. Em outras palavras, os signos da referida linguagem assumem a característica de símbolo. Isso ocorre nas sutilezas da diferença entre a adoção da letra para a representação genérica de quantidades (discretas e contínuas) e para a representação de quantidades genéricas.

A quarta concepção, linguístico-postulacional, eleva a Álgebra ao *status* de ciência das estruturas próprias de toda a Matemática como também da Lógica. Apresenta similaridade com a linguístico-sintático-semântica estabelecida pela reverência a uma linguagem simbólica, porém com a diferença de que atinge o nível máximo de abstração e generalização. A característica simbólica do signo linguístico se torna mais abrangente, pois ele ultrapassa os limites da representação de quantidade geral (discreta ou contínua) para atingir as entidades matemáticas que extrapolam o teor quantitativo como, por exemplo, as estruturas (ordem, topológica, algébrica e vetorial).

Usiskin (1994) evidencia quatro concepções que tem por base a importância que assume o uso diverso das variáveis. A primeira, *aritmética generalizada*, concebe as variáveis como a generalização de modelos aritméticos, a partir do estabelecimento de padrões, com a preservação das propriedades válidas para os números. Nesse caso, a letras não representam incógnitas, pois o estabelecimento do modelo geral traduz-se em espécie de lei, por exemplo, 2n, como representativo de número natural par.

A segunda concepção, *um estudo de procedimentos para resolver certos tipos problemas*, que implica na tradução de uma situação problema para uma linguagem algébrica, isto é, em uma equação. Neste caso, as variáveis são incógnitas ou constantes, tendo como instruções-chave a simplificação e a resolução.

Usiskin (1994) estabelece como terceira concepção o *estudo de relação entre grandezas*, considerada fundamentalmente algébrica, pois as leis se expressam em modelos matemáticos operacionais que estabelecem relação concomitantemente de dependência e independência entre grandezas que realmente variam. Assim, as letras assumem o significado de variável e não de incógnita como nas equações. Essa concepção é própria do conceito matemático de função. A variável assume dupla significação: como 'argumento', quando se refere aos elementos do domínio de uma função; ou 'parâmetro', se for o número obtido pela dependência do valor do argumento. Assim, por exemplo, num modelo funcional algébrico do primeiro grau afim, y = ax + b, x é argumento e f(x) o parâmetro, porém *a* e *b* podem assumir diferentes usos, no momento em que se particularizam para modelos específicos.

A quarta concepção, *estudo das estruturas*, se refere às entidades matemáticas desprovidas de significações eminentemente numéricas, isto é, ao formalismo das estruturas propriamente ditas. Refere-se, pois ao estudo das estruturas que, basicamente, compõe os conteúdos curriculares dos cursos superiores: monóide, grupo, anel, corpo, domínios de integridade e espaços vetoriais. A concepção de variável não está vinculada a uma relação ou função, nem atua como uma incógnita, mas como objetos arbitrários.

No âmbito dessas concepções, no momento do ensino escolar, é que os estudantes desenvolvem pensamento algébrico, considerado por Vygotski (1993) como o estágio máximo de abstração e generalização do pensamento matemático. No entanto, dentre os autores que investigam o ensino e a aprendizagem da Álgebra, não existe unanimidade sobre as características do pensamento algébrico.

Lins e Gimenes (1997) entendem como um modo de produzir significado para a álgebra, sem reduzi-lo somente a uma noção abstrata e extremamente genérica, mas também inclui as manipulações formais carregadas de significados. Fiorentini, Miorin e

Miguel (1993) consideram características do pensamento algébrico: levantar hipóteses, fazer afirmações e justificações, identificar regularidades, variáveis e constantes, estabelecer relações entre grandezas, generalizar as regularidades, usar variáveis e pensar em totalidades.

Ponte, Branco e Matos (2009) dizem que o pensamento algébrico requer algo mais que a capacidade de manipulação de símbolos. Os autores em referência se afiliam ao entendimento expresso no NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) de que pensamento algébrico se refere ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação, o que requisita: a compreensão de padrões, relações e funções; a representação e análise de situações e estruturas matemáticas, com o emprego de símbolos algébricos; a adoção de modelos matemáticos como forma de representar e compreender relações quantitativas; a análise da variação em diversos contextos. E, acrescentam:

> Deste modo, o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções. Inclui, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios. A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, que inclui a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações e na resolução de problemas (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 10).

Mas existe um componente central que une os diversos autores em relação ao pensamento algébrico: a ideia de generalização. Nesse sentido, esses mesmos autores entendem como a possibilidade de descobrir e comprovar propriedades presentes em uma classe de objetos. Por consequência, se volta tanto para os objetos como também às relações existentes entre eles, mas de forma tal que se procedam às representações e se raciocine sobre tais relações, preferencialmente, de modo geral e abstrato. A sugestão como via privilegiada para a promoção desse tipo de raciocínio é o estudo de regularidades num dado conjunto de objetos.

Kieran (1989) vincula o pensamento algébrico ao processo de generalização matemática. No entanto, para caracterizá-lo com consistência “não é suficiente ver o geral no particular, deve ser capaz de expressá-lo algebricamente” (KIERAN, 1989, p. 165). Com isso, quer dizer que a generalização é tanto um elemento do pensamento algébrico, quanto os meios para simbolização, que se fez presente desde no próprio processo de representação dos números. Por exemplo, para a indicação de uma determinada quantidade de uma grandeza discreta como canetas, sapatos, livros, etc.

Numa abordagem da Teoria Histórico-Cultural, a generalização vincula-se ao significado da palavra, um fenômeno da linguagem, um ato verbal do pensamento de reflexão da realidade que extrapola as sensações e percepções imediatas.

> Generalização e significado da palavra são sinônimos. Toda generalização, toda formação de conceitos é o ato mais específico, mais autêntico e mais indiscutível de pensamento. Consequentemente estamos autorizados a considerar o significado da palavra como um fenômeno do pensamento (VIGOTSKI, 2001, p. 398).

Nessa mesma perspectiva teórica, Davýdov (1982) distingue, de modo geral, dois tipos de generalização: a empírica e a teórica. A generalização empírica ocorre nos limites de redução do concreto caótico ao abstrato em sua base empírica. Isso se objetiva, no contexto do ensino de Matemática conforme explicitações anteriores, no movimento da aritmética para a álgebra. Davídov (1988) denomina de educação tradicional aquela que segue tal movimento, com a alerta de que essa forma de organização de ensino é predominante nos sistemas escolares de seu tempo.

Em oposição à generalização empírica, Davídov (1988) propõe um ensino voltado à generalização teórica. Esta se desenvolve pela mediação da relação geneticamente inicial, modelada no processo de redução do concreto caótico ao abstrato, e generalizada no movimento que ascende do abstrato ao concreto. Envolve, pois, o pensamento aritmético, geométrico e algébrico em único sistema conceitual.

A diferença entre o pensamento aritmético e o algébrico, para Fiorentini (2001), é que o pensamento algébrico é genérico e a expressão dentro de uma linguagem mais generalizada. Tem como um dos conceitos fundamentais a igualdade e não o x ou o y, tão usual no senso comum educacional; as letras são apenas álgebra simbólica. O pensamento aritmético se reduz a uma resposta final, a um valor único, a um resultado físico. É característica do pensamento aritmético a frase: *o resultado é*, que não tem um sentido algébrico e se torna um obstáculo para o ensino da álgebra.

CONSIDERAÇÕES SOBRE AS PROPOSIÇÕES DE DAVYDOV PARA O ENSINO DO CONCEITO DE NÚMERO NO PRIMEIRO ANO ESCOLAR

As proposições de Davydov para o ensino de matemática (ГОРБОВ et al, 2008, ДАВЫДОВ et al, 2012) se diferencia das desenvolvidas no Brasil tanto pelo seu conteúdo como também pelos seus métodos de ensino (ROSA, 2012; DAMAZIO, ROSA E EUZEBIO, 2012). Segundo Davýdov (1982), ao iniciar a educação escolar, o estudante precisa compreender que está iniciando uma nova atividade diferente da experiência pré-escolar. A atividade principal da criança, na idade escolar, não é a brincadeira, o jogo, mas, o estudo.

O foco, segundo Davídov (1988), é para a apropriação dos conhecimentos científicos com vistas ao desenvolvimento do pensamento teórico. Para tanto, faz-se necessário iniciar, na educação escolar, com o conteúdo geral dos conceitos. Desse modo, o estudante, ao resolver uma tarefa, se apropria da base geral do conceito que o orientará nas diferentes situações particulares.

Na especificidade do ensino do conceito de número, no primeiro ano escolar, Davydov propõe que se inicie com a ideia de número real, a partir do estudo das grandezas discretas e contínuas, na inter-relação de suas significações aritméticas, algébricas e geométricas. Portanto, difere do que se faz atualmente na educação matemática brasileira, em que o ponto de partida é o número natural nos limites da aritmética, a partir de contagens discretas (ROSA, 2012; DAMAZIO, ROSA E EUZEBIO, 2012).

Nas proposições davydovianas, inicialmente foca-se a atenção das crianças para as características das figuras e objetos tais como: cor, forma, tamanho (“maior-menor” e “igual”) e posição (“acima-abaixo”, “esquerda-direita” e “fica entre”). Elas identificam a diferença entre dois tipos de características: um lado cor e forma e de outro as grandezas (massa, comprimento, área, volume e capacidade).

As representações das relações de igualdade e desigualdade entre grandezas (comprimentos, áreas, volumes, massa, entre outras) surgem – como consequência do desenvolvimento de um conjunto de tarefas – na seguinte ordem e respectiva forma: objetal, gráfica, literal e, finalmente, a numeral. Sendo assim, trazem dois componentes algébricos: as representações e as relações, conforme caracterização de Fiorentini, Miorin e Miguel (1993), Lins e Gimenes (1997), Ponte, Branco e Matos (2009) e Kieran (1989).

Apresenta-se, a seguir, uma síntese do movimento sugerido por Davydov, porém por limitações da organização deste texto, aborda-se apenas uma grandeza, a área.

Colocam-se à disposição das crianças duas caixas para serem comparadas em relação às áreas das diferentes faces, pela massa e pelos comprimentos: da altura, da largura e da espessura. A conclusão, devidamente orientada pelo professor, é que ambas são iguais (Ilustração 01).

Ilustração 01: duas caixas

Na sequência, cada criança recebe uma unidade de medida para medir a área de uma das faces da caixa, estabelecida previamente. Porém, as crianças não sabem que existem entre elas dois tamanhos diferentes das referidas unidades (Ilustração 02).

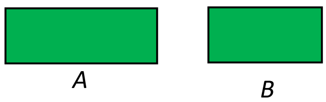

Ilustração 02: duas unidades de medidas diferentes

Por isso, as respostas das crianças serão diferentes, ou seja: quem utilizou a unidade de medida A, concluirá que a face da caixa mede três unidades e, por sua vez, aquelas que procederam com a unidade B, obterão quatro unidades, conforme ilustração 03.

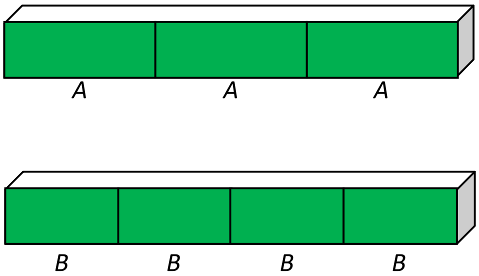

Ilustração 03: Comparação da face da caixa as unidades de medida A e B

Quando a medição da face da caixa (Figura 3) ocorreu com a unidade *A*, sua medida foi três, isto é, três vezes a unidade *A*. Matematicamente, tem-se a seguinte relação de multiplicidade entre as duas grandezas: F = 3*A*. Ou ainda, o quociente da medida da face da caixa pela unidade de medida *A* é igual a 3 (três), pois a unidade de medida "coube" três vezes sobre a face da caixa. Trata-se de uma relação de divisibilidade, cuja representação é: $\frac{F}{A} = 3$. De modo similar, quando a face é comparada com a unidade *B*, sua medida é quatro, F = 4*B*. Ainda, o quociente da medida da face da caixa pela unidade de medida *B* é igual a 4 (quatro), uma vez que a unidade de medida B "cabe" quatro vezes na face da caixa: $\frac{F}{B} = 4$.

Ao receber respostas diferentes, o professor supõe que as caixas são de tamanhos distintos, que houve um engano na conclusão inicial de que ambas eram iguais. E, sugere a comparação direta das caixas novamente (Ilustração 4).

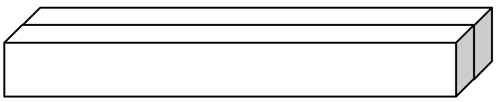

Ilustração 04: Comparação direta das faces das caixas

A conclusão a partir dessa nova comparação é que ambas as faces são iguais, o que leva o professor a questionar sobre a razão que proporcionou resultados diferentes quando do processo de medição com as unidades de medidas A e B. As crianças, com orientação do professor, concluem que a medição foi feita com unidades de medidas diferentes. Então a unidade de medida maior pode ser sobreposta menos vezes na face da caixa do que a unidade de medida menor. A síntese é: a variação da unidade de medida implica em resultado diferente da medição. Como diz Caraça (1984), uma mesma grandeza tem tantas medidas quantas as unidades consideradas.

Essa tarefa, representativa das proposições davydovianas, mostra que o número é apresentado como resultado de comparação entre duas grandezas da mesma espécie (comprimento com comprimento, área com área...), uma como unidade de medida da outra. No exemplo, a referência é área das superfícies A e B como unidade de medida da área da face. Portanto, na proposta de Davydov, o número surge a partir da relação geral entre as grandezas, que pode ser expressa como: $\frac{G}{U} = X$. Tem-se, então, *G* como a grandeza a ser medida, *U* a unidade de medida e *X* o resultado da comparação entre G e U. O significado de *X* na divisão de números é o número de vezes que a unidade de medida "cabe" na área da face da caixa. Ao variar a unidade de medida (U), o valor numérico da grandeza em medição (X) também varia.

Portanto, o modelo $\frac{G}{U} = X$ é eminentemente algébrico, expressa uma relação entre duas grandezas em geral. E, como tal, G, U, e X variam ao se considerar casos particulares, como por exemplo, a medição da área da face da caixa com as duas unidades de medida. O seu teor generalizador – por isso, algébrico – está, no mínimo, por duas razões. A primeira delas é pela possibilidade de transferência para qualquer tipo de grandeza contínua e discreta. A segunda por imprimir um movimento com tendência numérica tanto para infinitamente grande quanto pequena. Como exemplo, esse caso pode ser traduzido no questionamento: o que ocorre com o valor de $\frac{G}{U}$, quando unidade de medida (U) se torna cada vez maior ou menor? Embora, aparentemente simples, a questão requer uma análise mais cuidadosa. Não se trata de um modelo aritmético, se assim o fosse a pergunta seria do tipo: "o que ocorre com o valor de $\frac{1}{2}$, quando *2* se torna cada vez maior?" (Usiskin, 1994). Já o modelo matemático $\frac{G}{U} = X$, fundamentalmente algébrico, possibilita a variação do U, que determina a sua posição de variável independente e X a de variável dependente, isto é, que depende do valor atribuído a U.

Desse modo, a proposição davydoviana não se vincula à concepção de álgebra que Fiorentini, Miorin e Miguel (1993) denominam de processológica, pois incentiva a ação investigativa do estudante para desenvolver diversos modos de resolver uma tarefa. Também, não é possível afirmar que, implicitamente, tem elementos das concepções linguístico-sintático-semântica e linguístico-postulacional, mesmo com o uso de letras no modelo. Qualquer conclusão a esse respeito requer um estudo de toda a proposta de Davydov, o que evitaria afirmações precipitadas ou inferências a partir da análise de uma ou outra "tarefa particular" (DAVÍDOV, 1988).

Contudo, não se pode negar a aproximação com uma das concepções de álgebra estudadas por Usiskin (1994): estudo de relação entre as grandezas. Justifica-se tal afirmação pelo entendimento de Davydov que conceito teórico de número tem base genética a relação entre grandezas variáveis.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o objetivo de situar a problemática de estudo, na introdução, mostramos que historicamente ocorreram movimentos em prol da unificação da Aritmética, Álgebra e Geometria, até então, disciplinas escolares distintas ou campos matemáticos. E, como tal, trazem status conceituais peculiares que mesmo ao se constituírem em unidade, a Matemática, não perdem as características de suas especificidades. Isso significa dizer que, no momento de ensinar um conceito matemático com o esforço de evitar a tricotomização aritmética/álgebra/geometria, há sempre um componente ou uma significação de cada uma delas. A recente união desses campos é argumento para o entendimento de que, em seu processo histórico, consolidaram ideias e fundamentos que estabelecem identidades próprias e distinguem uma da outra. A Álgebra, foco maior do presente estudo, se constitui como campo do conhecimento num movimento caracterizado por uma linguagem inicialmente retórica, seguida de uma forma sincopada, transforma-se em simbólica e atinge seu nível de axiomatização atual. Os autores referenciados no texto entendem que esses momentos diferenciados de constituição da linguagem algébrica, expressam o seu teor e, consequentemente, concepções distintas, tanto da álgebra quanto do pensamento algébrico. Isso significar dizer que, em qualquer proposição atual de ensino de matemática, mesmo que haja um esforço para não tricotomizar álgebra/geometria/aritmética, sempre há uma concepção de álgebra. Nesse sentido, mesmo no conceito de número, concebido na educação escolar brasileira como eminentemente aritmético, a proposição de Davydov esquiva-se dessa tricotomitização e, portanto, apresenta um fundamento algébrico que articula as demais significações.

Isso ocorre quando Davydov concebe o conceito de número em seu estágio mais atual de desenvolvimento, o número real. Este, surge como expressão das relações entre grandezas, uma tomada como unidade de medida da outra, que se traduz no modelo algébrico $\frac{G}{U} = X$, em que variando a unidade de medida da grandeza, o resultado do processo de medição também varia. Portanto, a concepção algébrica do movimento conceitual proposto por Davydov para o ensino de número, no primeiro ano do Ensino Fundamental, é o estudo de relação entre as grandezas apresentada Usiskin (1994). Desse modo, há um movimento que articula pensamento e linguagem sem a preocupação de priorizar um em detrimento do outro.

REFERÊNCIAS

BABINI, J. **Historia de las Ideas Modernas en Matemática.** Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires, 1967.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BÚRIGO, E. Z. Tradições Modernas: reconfigurações da matemática escolar nos anos 1960. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 23, nº 35B, p. 277-300, abril 2010.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 1.ed. Lisboa: Sá da Costa, 1984.

DAMAZIO, A.; ROSA, J. E.; EUZEBIO, J. S. O ensino do conceito de número em diferentes perspectivas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. v. 14, p. 209-231, 2012.

DAVÍDOV, V. V. La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación teórica y experimental. Moscú: Editorial Progreso, 1988.

DAVÝDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

EUZÉBIO, J. S. **Ensino do conceito de número: Proposta de ensino Davydov e as proposições tradicionais.** 2011. 64f. TCC (Graduação em Pedagogia). Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Ed. Unicamp, 1995.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, Unicamp, Ano 3 – n°4, p. 1-37, 1995.

FIORENTINI, D. Rumos da Educação Matemática. In: **Anais do Seminário de Avaliação das Feiras Catarinense de Matemática**. Brusque, SC, 2001.

KIERAN, C. Kieran, C. The early learning of Algebra: A structural perspective. In: S. Wagner, & C. Kieran (Eds.), **Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra**, Reston,Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, p. 33-56, 1989.

KLINE, M. **O Fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: Ibrasa, 1976.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM M. A. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo?. **Pro-Posições**, v. 3, n.1[7], Campinas, SP, março de 1992.

MIORIN, M. Â.; MIGUEL, A; FIORENTINI, D. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Zetetiké:**Campinas: UNICAMP, ano 1, n. 1, p. 19-39, 1993.

MIRANDA, M. M. **A experiência norte-americana de fusão entre Aritmética, Álgebra, Geometria e sua apropriação pela educação matemática brasileira** (Dissertação de Mestrado). PUC, São Paulo, 2003.

PAVANELLO, R.N. O abandono da Geometria: uma visão histórica. Campinas,SP, FE-UNICAMP, 1989. Dissertação de Mestrado.

PAVELLE, R.; ROTHSTEIN, M. & FITCH. J. **Computer Algebra**, Scientific American, v. 245, n. 6, pp.102-113, dez. 1981.

PINTO, R. A.; FIORENTINI, D. Cenas de uma aula de álgebra: produzindo e negociando significados para a “coisa”. **Zetetiké**. Campinas: UNICAMP, v. 5, n. 8, p. 45-71, jul./dez 1997.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico.** Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral-de Inovação e de Desenvolvimento Curricular - DGIDC, 2009.

ROSA, J. E.; SOARES, M.T.C.; DAMAZIO, A. Conceito de número no sistema de ensino de Davydov, In: **Anais da XIII Conferência interamericana de Educação Matemática**; Recife, 2011.

ROSA, Josélia Euzébio da. **Proposições de Davydovy para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de sistema de significações numéricas**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná, 2012.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A. O ensino do conceito de número: uma leitura com base em Davydov. **Revista Unión** (San Cristobal de La Laguna), v. 30, p. 81-100, 2012

SANTA CATARINA, Secretaria de Estado da Educação e do Desporto. **Proposta curricular de Santa Catarina**. Florianópolis: GOGEM, 1998.

SANTOS, L. G. **Introdução do Pensamento Algébrico: um Olhar sobre Professores e Livros Didáticos de Matemática** (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Espírito Santo, 2007.

TORANZOS, F.I. **Enseñanza de la matemática**. Buenos Aires: Editorial Kapelusz, 1963.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, p. 9-22, 1995.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem.** Bezerra P. Trad.. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

VYGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas II: Incluye Pensamento y Lenguaje, Conferecias sobre Psicología.** Madrid: Visor Distribuciones, 1993.

ГОРБОВЕТ al, Обучениематематике. 1 класс: Пособиедляучителейначальнойшколы (СистемаД.Б.Эльконина – В.В. Давыдова). 2-еида., перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб 2008. 128p.

ДАВЫДОВ, В. В. О. et al. **Математика, 1-Кjiacc.**Mockba: Мпрос - Аргус, 2012.