P O I É S I S – REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – MESTRADO – UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

Unisul, Tubarão, v.14, n. 25, p. 221-236, Jan/Jul 2020.

By Zumblick

http://10.19177/prppge.v13e242020221-236

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E FRACTAIS: UMA CONEXÃO POSSÍVEL?

José Carlos Pinto Leivas[1]

Bárbara Regina da Silveira Batista[2]

RESUMO

Este artigo é um fragmento de uma pesquisa de mestrado, de cunho qualitativo, que teve por objetivo investigar quais as contribuições do uso de representação de fractais, quando utilizada para introdução de sequências numéricas, podem ser obtidas com licenciandos em Matemática. O fragmento aqui apresentado constitui-se da análise de um projeto piloto, desenvolvido em uma oficina, com três professores universitários, a fim de vislumbrar erros e acertos antes de sua aplicação aos licenciandos. Foi aplicado um questionário inicial aos professores para identificar sua formação, concluindo-se que todos têm formação em Matemática, dois atuam no Cálculo e um na Educação Básica. A construção do fractal Floco de Neve de Koch, com atividades envolvendo sequências numéricas, áreas e perímetros, permitiu concluir que é possível utilizar tal construção para introduzir o assunto nas disciplinas de Cálculo, de forma incentivadora.

Palavras-chave: Sequências numéricas; Fractal Floco de Neve de Koch; Cálculo; Investigação matemática.

NUMERIC SEQUENCES AND FRACTALS: A POSSIBLE CONNECTION?

ABSTRACT

This article is a fragment of a master's research, whose purpose was to investigate the contributions of the use of fractal representation, when used for the introduction of numerical sequences, can be obtained with future teachers in Mathematics? The fragment presented here consists of an analysis of a pilot project, developed in a workshop with three university professors, in order to glimpse errors and correctness before its application. It was used an initial questionnaire to the teachers with the purpose of identifying their formation, concluding that all have formation in Mathematics, two act in Calculus and one in Basic Education. The construction of the Koch Snowflake fractal, with the activities involving numerical sequences, areas and perimeters, allowed us to conclude that it is possible to use such a construction to introduce the subject in the disciplines of Calculus in an encouraging way.

Keywords: Numeric sequences; Fractal Snowflake of Koch; Calculus; Mathematics investigation.

SECUENCIAS NUMÉRICAS Y FRACTALES: UNA CONEXIÓN POSIBLE?

RESUMEN

Este artículo se constituye en un fragmento de una investigación de maestría, de cuño cualitativo, que tuvo por objetivo investigar: ¿cuáles son las contribuciones del uso de representación de fractales, cuando se utiliza para introducción de secuencias numéricas, pueden obtenerse con futuros maestros

[1] Licenciado em Matemárica pela UCPEL. Especialista em Análise Matemática pela UFPEL. Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela UFSC. Doutor em Educação (Matemática) pela UFPR. Prof. do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da UNIFRA. Prof. Titular aposentado da FURG. Coordenador do GT4 - Ensino Superior da SBEM. Editor da Revista Vidya. Lider do GEPGEO - Grupo de Estudos e Pesquisas em Ensino de Geometria. E-mail: <leivasjc@unifra.br>. ORCID ID.: http://orcid.org/0000-0001-6876-1461.

[2] Mestre em Ensino de Matemática pela UNIFRA. E-mail: <barbarabatistael@gmail.com>. ORCID ID.: http://orcid.org/0000-0001-9155-652X.

en Matemáticas? El fragmento aquí presentado se constituye de análisis de un proyecto piloto, desarrollado en un taller con tres profesores universitarios, a fin de vislumbrar errores y aciertos antes de su aplicación. Se utilizó un cuestionario inicial a los profesores con el fin de identificar su formación, concluyendo que todos tienen formación en Matemáticas, dos actúan en el Cálculo y uno en la Educación Básica. La construcción del Fractal Copo de Nieve de Koch, con las actividades que involucra secuencias numéricas, áreas y perímetros, permitieron concluir que es posible utilizar tal construcción para introducir el asunto en las disciplinas de Cálculo de forma incentivadora.

Palabras clave: Secuencias numéricas; Fractal Copo de Nieve de Koch; Cálculo; Investigación matemática.

Introdução

Descartes, ao confiar na compreensão da lógica para um desenvolvimento analítico da Geometria, ampliou as dimensões comprimento, largura e profundidade, correspondentes aos inteiros, 1,2,3, perceptíveis segundo o mundo euclidiano, para além das dimensões maiores do que 3. Ao anunciar a Geometria Diferencial, em 1854, Riemann "provou que, ao lado da geometria de Euclides, havia outras que se referiam a espaços de qualquer número de dimensões, desde zero ao infinito. O mundo tridimensional descrito por Euclides passou a ser considerado, francamente, como uma das muitas possibilidades igualmente lógicas" (GUILLEN, 1998, p.95).

Na década de 70 do século XX, surgiu uma nova Geometria, a denominada Fractal, a qual não utiliza coordenadas, como é o caso da Analítica; tampouco, exclusivamente, dimensões inteiras, como a Euclidiana e menos ainda as deformações contínuas, oriundas da Topologia. Originada de estudos provenientes da IBM, essa geometria está intimamente ligada à teoria do Caos, ou seja, busca padrões organizados de comportamento dentro de um sistema aparentemente aleatório. Na mitologia grega, caos era o estado não-organizado ou o "nada", de onde todas as coisas surgiam, mas não era apenas o vácuo, e sim o estado de escuridão e nebulosidade infinita.

> Na constituição de nosso mundo, da natureza em geral, por mares e oceanos, separando os continentes e ilhas, com suas costas, suas montanhas e rios, rochas, plantas e animais e, acima as nuvens, etc., temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidades e o caos; tentar simplificá-las, empregando formas usuais da clássica geometria euclidiana, como triângulos, círculos, esferas, cones, etc..., seria absurdamente inadequado. A geometria dos Fractais pode fornecer aproximações para essas formas. (BARBOSA, 2002, p.10)

Segundo seu criador, Mandelbrot (1998, p.38), a Geometria Fractal, “apesar de ser largamente aceita (...) ainda não se tornou ‘acadêmica’, mantendo uma diversidade que é intrínseca, rasa, divertida e importante. Não só levanta, ainda, questões fundamentais, como continua a desencadear polêmicas”. Apesar de relativamente antiga, percebe-se que essa afirmação ainda se mantém atual, motivo pelo qual optou-se por um estudo abrangente de diversos tipos de objetos fractais, enfocando suas principais características históricas e epistemológicas, assim como os processos matemáticos originais que possibilitam suas construções.

Essa Geometria permite a integração de vários campos da Matemática e de outras ciências e, quando inserida no ensino, permite desenvolver o lado experimental dos alunos e entendê-la como facilitadora para apropriação de conceitos de sequências, por exemplo. Ao inseri-la no ensino, para introduzir o conteúdo de sequências numéricas na disciplina de Cálculo, no curso de Licenciatura em Matemática, caracteriza um tema de pesquisa que deu origem a uma dissertação de mestrado defendida pela primeira autora do artigo, sob a orientação do segundo.

A experiência adquirida pela autora, em docência no Ensino Superior, mostra que se ensina os conteúdos com grande valorização dos conceitos algébricos, seguindo a apresentação sugerida em livros didáticos, a exemplo do que fazem Anton (2000) e Swokowski (1994), cuja abordagem não tem alusão ou conexão com outras áreas, como a Geometria Fractal, a qual utiliza processos interativos aos quais pode ser associado o conteúdo de sequências.

Lorenzato (1995, p.6) reforça essa ideia, afirmando que:

> são inúmeras as causas, porém, duas delas estão atuando forte e diretamente, em sala de aula: a primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas. A segunda causa da omissão geométrica deve-se à exagerada importância que entre nós desempenha o livro didático.

Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica (BRASIL, 2002), em nível superior de licenciatura, de graduação plena, os ingressantes nesses cursos, em geral, e nos cursos de formação de professores, em particular, têm, algumas vezes, formação insuficiente, em decorrência da baixa qualidade dos cursos de Educação Básica que lhes foram oferecidos. O documento sugere que é preciso que os cursos de preparação de futuros professores tomem para si a responsabilidade de suprir as eventuais deficiências de escolarização básica que os futuros docentes receberam, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio.

D'Ambrosio (1996) sugere que sejam abordados temas contemporâneos na Matemática. O autor propõe trazê-los para a escola, como é o caso da Matemática Discreta e a Teoria do Caos, dentre outros: "o que se chama de matemática discreta e o que chamavam ´casos patológicos`, que envolvem desde a linearidade até a teoria do caos, fractais, fuzzies, teoria de jogos, pesquisa operacional, programação dinâmica". (p.59, grifos do autor).

A inserção de Geometria Fractal no estudo introdutório de sequências numéricas, na formação de professores de Matemática, conecta-se às competências e habilidades próprias do educador matemático, fazendo com que o licenciando desenvolva estratégias de ensino que favoreçam a sua criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos.

Conforme XXX, a Geometria Fractal pode apresentar uma relação entre a Álgebra e a Geometria, representando o que há de mais moderno no ensino da segunda área.

> [...] fractal, objeto de uma nova Geometria, pode representar mais uma relação entre Álgebra e Geometria, desenvolvendo habilidades algébricas e visuais por meio de processos iterativos. Deve-se levar em conta que a geometria fractal e suas aplicações no desenvolvimento da Teoria do Caos é um dos aspectos mais modernos em termos de descobertas geométricas [...].

Considerando-se que o conceito de sequências numéricas é abordado destacando aspectos conceituais, porém pouco contextualizados, como se observa no livro "Cálculo com Geometria Analítica" (SWOKOWSKI, 1994), um projeto de pesquisa[3] sobre análise e classificação de erros cometidos em resolução de exercícios e problemas envolvendo sequências, em cursos de Licenciatura em Matemática, realizado sob a coordenação da professora ZZZ, com a participação do segundo autor do artigo, tornando-se importante investigar conexões entre as duas áreas, Cálculo e Geometria, justificando-se a seguinte questão de pesquisa: quais contribuições do uso de representações de fractais, quando

[3] Processo YYYY, CNPq

utilizado para introdução de sequências numéricas, podem ser obtidas com licenciandos em Matemática de uma instituição de Ensino Superior no sul do estado do Rio Grande do Sul?

A partir dessa questão de pesquisa, delineou-se o seguinte objetivo geral para uma dissertação de mestrado profissional em ensino de Matemática: investigar quais as contribuições do uso de representação de fractais, quando utilizado para introdução de sequências numérica, podem ser obtidas com licenciandos em Matemática?

A fim de cumprir com tal meta, foi elaborado e levado a cabo um projeto piloto, objeto deste artigo, o qual teve por objetivo testar as atividades que seriam propostas, na investigação com os estudantes da licenciatura, a fim de validar o instrumento de coleta de dados, o que será descrito e analisado a seguir.

Desenvolvimento e análise do projeto piloto

A pesquisa teve como fundamentação teórica a Investigação Matemática, a qual tem como um de seus principais defensores Ponte et al. (2006), para quem essa tem colaborado na promoção da aprendizagem dos alunos, indicando que desenvolvem novas capacidades e contribuem para adquirir novos conhecimentos. Em contextos de ensino e aprendizagem, ela é uma busca de soluções ou alternativas para uma situação desconhecida. Segundo as ideias desses autores, investigar, matematicamente, é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades. “Investigar em matemática constitui uma poderosa forma de construir o conhecimento” (Ibidem, p.10). O uso da Investigação Matemática envolve a participação efetiva do pesquisador na elaboração e aplicação da atividade, para que os participantes respeitem as estratégias apresentadas e que ele consiga auxiliá-los nas elaboração e reflexão acerca dos resultados.

Elaborada as atividades a fazerem parte da pesquisa com os licenciandos, foi proposto um estudo realizado com três professores de uma Instituição de Ensino Superior privada, localizada no município de Santiago/RS, na qual atua a primeira autora. Foi considerado como piloto para a pesquisa e para possível correção de rumos posteriores. Os professores envolvidos têm formação em Matemática, dois deles atuam na docência superior e um, como Técnico em Serviços Educacionais. A fim de evitar identificá-los, os mesmos foram designados por P1, P2 e P3. Foram feitos registros escritos por parte deles, bem como da investigadora, além de fotografias, os quais serviram para a análise. A atividade seguiu os seguintes passos:

1º - explanação referente à Geometria Fractal;

2º - entrega da atividade para mediação da Investigação Matemática;

3º - registro fotográfico e relatório elaborado pela pesquisadora.

Inicialmente, os participantes responderam a um questionário de identificação. Dessa forma verificou-se que a formação comum a todos é a Licenciatura em Matemática. P1 é Licenciado em Matemática e Mestre em Matemática Aplicada. Sua experiência docente abrange o Ensino Superior em disciplinas de Cálculo, Estatística, Matemática Discreta, Geometria Analítica e Álgebra Linear. Já P2 e P3 são licenciadas em Matemática e habilitadas em Física e Desenho. P2 atua na docência, na Educação Básica e Ensino Superior, nas disciplinas de Física e Cálculo Diferencial e Integral. P3 já atuou na docência da Educação Básica, porém atualmente não exerce docência.

O objetivo do questionário foi conhecer melhor os participantes, identificando sua atuação e formação, para que a iteração com o pesquisador fosse dinâmica e que o processo de investigação acontecesse de forma otimizada. Verificou-se, analisando os registros, que dois dos professores atuam no Cálculo e um participante atuou na Educação Básica, porém não atua na docência atualmente.

Na sequência do estudo. a pesquisadora explanou brevemente um histórico da Geometria Fractal, concluindo que os participantes já ouviram falar dessa Geometria, por meio de sites na internet, mas desconheciam o assunto matematicamente. A expectativa da pesquisadora, em relação à aplicação da atividade, foi atingir o objetivo proposto, já que se trata de professores com formação e atuação na área específica.

Após a aplicação do questionário, os participantes deveriam construir o fractal Floco de Neve de Koch e, para tal, foram dadas as orientações a seguir:

- construir um triângulo equilátero de L cm de lado;

- dividir cada lado do triângulo em três partes de mesma medida;

- desconsiderar a parte central em cada um dos lados;

- tendo por lado esse segmento central desconsiderado, construir um novo triângulo equilátero, para fora do triângulo inicial;

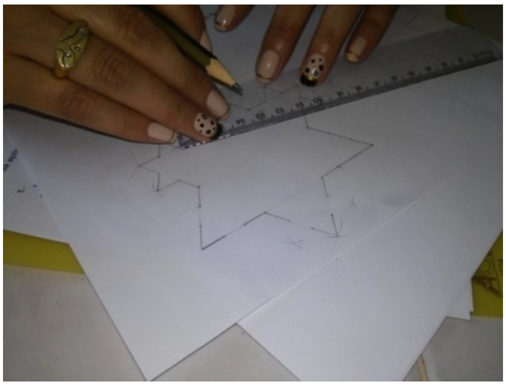
- dividir cada um dos lados dos novos triângulos em três partes de mesma medida;

- desconsiderar, novamente, a parte central, em cada um dos dois lados dos novos triângulos, e repetir o procedimento anterior;

Os participantes tiveram uma atitude otimista e demonstraram interesse pela proposta de construção do fractal, o que aconteceu satisfatoriamente e atendeu à expectativa inicial. Percebeu-se que eles interagiam entre si e comparavam suas construções. Isso fez com que trocassem informações e descrevessem processos de construção de triângulos equiláteros, divisão de segmentos e uso de compasso e régua.

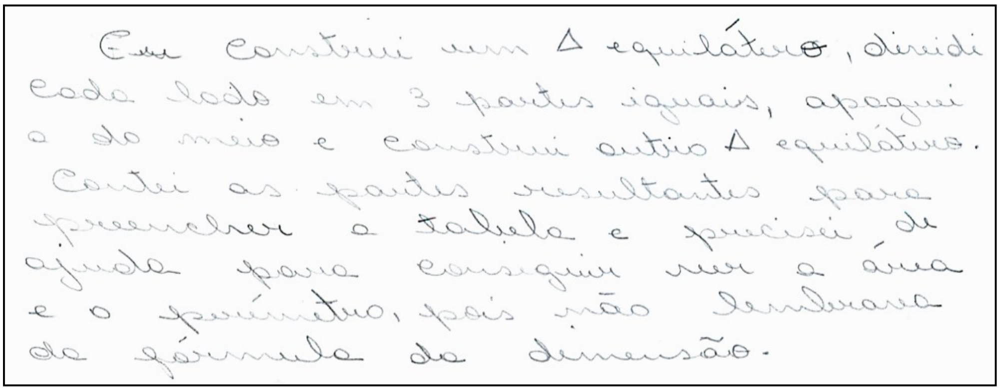
Durante a construção, a pesquisadora foi questionando o processo de iteração e eles foram observando o comportamento dos lados, da área e do perímetro da figura. Muitos questionamentos surgiram, relacionados à área e à dimensão fractal. Dessa forma, foi necessário um breve esclarecimento sobre esse assunto. Foi recomendando repetir esse processo tantas vezes quantas fosse possível, formando várias interações do Fractal Floco de Neve. A Figura 1 ilustra o envolvimento na construção com o uso de régua e compasso.

Figura 1. P1 e P2 realizando a construção do fractal.



Fonte: registro fotográfico da pesquisadora.

O participante P3 fez a descrição da sua construção do fractal, como segue, literalmente: *Eu construí um Δ (triângulo) equilátero, dividi cada lado em 3 partes iguais, apaguei a do meio e construí outro Δ (triângulo) equilátero. Contei as partes resultantes para* *preencher a tabela e precisei de ajuda para conseguir ver a área e o perímetro, pois não lembrava da fórmula da dimensão.*[4]


Eu construí um Δ equilátero, dividi cada lado em 3 partes iguais, apaguei o do meio e construí outro Δ equilátero. Contei as partes resultantes para preencher a tabela e precisei de ajuda para conseguir ver a área e o perímetro, pois não lembrava da fórmula da dimensão.

Após, os participantes foram convidados a preencher o Quadro 1, que fora distribuído sem preenchimento, de acordo com a construção realizada, seguindo as instruções:

- escreva a sequência formada pelas medidas dos lados até a terceira iteração;

- tomando cada iteração, identifique a área e o perímetro. Qual a soma dessas áreas?;

- identifique a sequência formada pelas iterações descritas no quadro. Escreva a expressão do seu termo geral.

Quadro 1. Para ser preenchido pelos participantes, com cinco linhas.

Quantidade de iterações= n	Quantidade de segmentos em cada iteração N(n)	Medida do lado a partir da inicial ℓ	Área de cada objeto fractal a partir da dimensão D	Perímetro da figura
1ª iteração=> n=0	3	ℓ	ℓ^D	3 ℓ

Era expectativa da investigadora que a primeira linha do quadro fosse preenchida, como ilustrado. Entretanto, poderia ter começado com n=1, o que levaria a obter-se:

[4] As transcrições dos participantes estão em itálico.

3x4 ℓ/3 $(ℓ/3)^D$ 3x4(ℓ/3).

Na explanação inicial, a investigadora fez uma analogia da área do fractal com a do quadrado, onde cada 'fractalzinho' se assemelharia a um 'quadradinho' e, por isso, induziu-os a denominar o expoente por D, que, no caso do quadrado, é 2, ou seja, o lado elevado ao quadrado ou a D, no caso fractal. A partir do preenchimento do quadro, foram convidados a observarem as diversas interações e as sequências que se formavam nas diversas colunas. Foi solicitado que respondessem aos seguintes itens:

- escreva a sequência que fornece a quantidade de elementos obtidos a partir da primeira iteração [segunda coluna];

- existe uma expressão para o termo geral? Se sim, qual é?

- essa sequência tende a algum valor específico? Se sim, qual é este valor?

A análise do quadro preenchido por P3 mostrou que realizou iterações para n=0,1,23,n, enquanto que os outros dois fizeram n=0,1,2,n.

Depois da coluna destinada para colocar a área de cada um, foi necessário determinar a soma delas, isto é: 1ª linha, 3.4.(ℓ/3)D; 2ª linha, 3.42(ℓ/3^2)D; 3ª linha 3.43(ℓ/3^3)D, para chegar à generalização abaixo.

Área Total = 3x4n $(ℓ/3n)^D$ = 1.

A partir disso, deveriam identificar as sequências formadas nas observações das interações. Para tal, foram fornecidas as orientações a seguir e, a partir do preenchimento do quadro 2, descritas.

Na Figura 2, se ilustra a descrição de P3, como correta, para os questionamentos, em ficha distribuída pela investigadora para os registros escritos.

Figura 2. Respostas dadas por P3.

1. Escreva a sequência que fornece a quantidade de elementos obtidos a partir da primeira iteração [segunda coluna] e responda:

$s = 3, 12, 48, 192, 768$.

a) Existe uma expressão para o termo geral? Se sim, qual é?

Sim, a expressão para o termo geral é $3 \cdot 4^n$

b) Esta sequência tende a algum valor específico? Se sim, qual é este valor?

Não, pois tende ao infinito

Fonte: pesquisadora.

P1 e P2 fizeram registros análogos, escreveram a expressão do termo geral e indicaram a tendência assim: *Não tem. Tende ao infinito*.

A pesquisadora, então, solicitou o seguinte:

- repita o item 1 para a sequência obtida a partir das medidas dos lados dos triângulos formados nas interações [terceira coluna];

- repita os elementos da quarta coluna;

- repita os elementos da quinta coluna.

A figura 3 ilustra o quadro preenchido por P3.

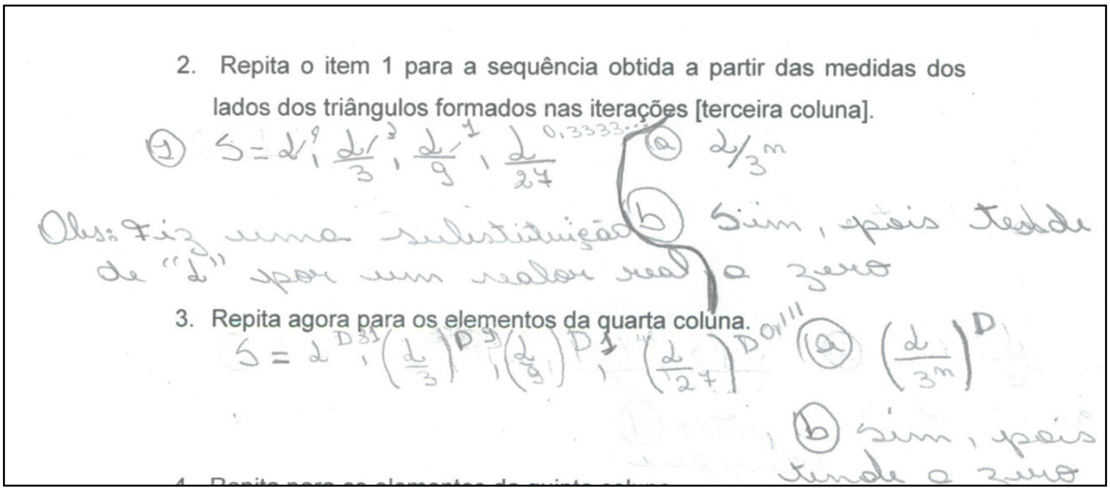
Figura 3. Registro feito por P3.

Quantidade de iterações= n	Quantidade de segmentos em cada iteração N(n)	medida do lado a partir da inicial L	Área de cada objeto fractal a partir da dimensão D	Perímetro da figura
0	3	L	L^D	$3 \cdot L$
1	$3 \cdot 4$	$L/3$	$(L/3)^D$	$3 \cdot 4 \cdot L/3$
2	$3 \cdot 4 \cdot 4$	$L/3^2$	$(L/3^2)^D$	$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot L/3^2$
3	$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$	$L/3^3$	$(L/3^3)^D$	$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot L/3^3$
n	$3 \cdot 4^n$	$L/3^n$	$(L/3^n)^D$	$3 \cdot 4^n \cdot L/3^n$

Fonte: dados da pesquisa.

A sua ficha de registro, ao contrário dos outros dois participantes, é mais rica em detalhes e pode ser observada na Figura 4, a seguir.

Figura 4. Folha de registros de P3.


2. Repita o item 1 para a sequência obtida a partir das medidas dos lados dos triângulos formados nas iterações [terceira coluna].

(1) $S = \ell, \frac{\ell}{3}, \frac{\ell}{9}, \frac{\ell}{27}$ 0,3333... (a) $\ell/3^n$

Obs: Fiz uma substituição de "ℓ" por um valor real (b) Sim, pois tende a zero

3. Repita agora para os elementos da quarta coluna.

$S = \ell^D, \left(\frac{\ell}{3}\right)^D, \left(\frac{\ell}{9}\right)^D, \left(\frac{\ell}{27}\right)^D$ 0,111 (a) $\left(\frac{\ell}{3^n}\right)^D$

(b) Sim, pois tende a zero

Fonte: dados da pesquisa.

A Figura 5 é o quadro preenchido por P1, que é idêntico ao de P2.

Figura 5. Registro feito por P1.

Quantidade de iterações= n	Quantidade de segmentos em cada iteração N(n)	Medida do lado a partir da inicial L	Área de cada objeto fractal a partir da dimensão D	Perímetro da figura
0	3	L	L^D	$3L$
1	3×4	$L/3$	$(L/3^1)^D$	$3 \times 4 \times L/3$
2	$3 \times 4 \times 4$	$L/3^2$	$(L/3^2)^D$	$3 \times 4 \times 4 \times L/3^2$
n	3×4^n	$L/3^n$	$(L/3^n)^D$	$3 \times 4^n \times L/3^n$

Fonte: dados da pesquisa.

No que segue, apresenta-se análise dos registros dos participantes ao seguinte questionamento: o que a segunda, a terceira e a quarta colunas possuem em comum?

P1 escreveu a sequência dos perímetros: 3ℓ, 3.4ℓ/3, 3.4.4ℓ3²,..., 3.4n.ℓ/3 n,... Muito embora a esteja expressando corretamente, não indicou a variação de n e, a seguir, escreveu:

- possui em comum os elementos.

- *o grupo do perímetro tende a um, enquanto que, para o grupo dos segmentos, não é possível definirmos esse processo.*

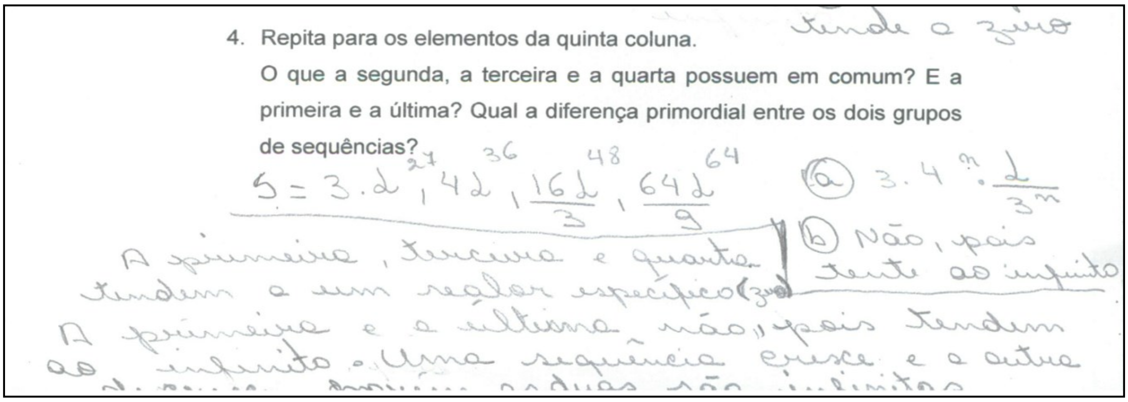
Observa-se, com relação ao grupo de perímetros tender a um, que é uma conclusão equivocada, pois intuitivamente pode-se perceber que o perímetro cresce a partir de 3. Em relação a não poder definir, no processo, a tendência da sequência que fornece a quantidade de segmentos, também se equivoca, pois 4n produz uma sequência divergente.

P2 indicou a sequência dos perímetros, corretamente, mas afirma, de forma equivocada, que: *o número tende a um*.

P3 expressou a sequência de perímetros: S=3ℓ, 4ℓ, 16ℓ/3, 64ℓ/9. Ela escreveu, acima de cada termo, os valores: 27, 36, 64 e fez substituição de l=9, que foi o valor utilizado como medida do lado na sua construção do fractal. Sobre a existência de uma expressão para o termo geral, afirma existir e a indica corretamente. Quanto à sequência tender a algum valor especifico, expressa-se: *não, pois tende ao infinito*.

Com relação a diferenças existentes entre os grupos de sequências, assim se expressa P3: a *primeira, terceira e quarta tendem a um valor específico (zero). A primeira e a última não, pois tendem ao infinito. Uma sequência cresce e a outra decresse, porém as duas são infinitas.* Conclui-se que o registro da P3 é correto, muito embora se perceba um equívoco ao escrever primeira, terceira e quarta, em lugar de segunda, terceira e quarta, pois na frase seguinte usa corretamente a primeira.

Figura 6. Registro de P3.


4. Repita para os elementos da quinta coluna.
O que a segunda, a terceira e a quarta possuem em comum? E a primeira e a última? Qual a diferença primordial entre os dois grupos de sequências?

tende a zero

$S = 3.\ell, 4\ell, \frac{16\ell}{3}, \frac{64\ell}{9}$ (27, 36, 48, 64)

(a) $3 \cdot 4^n \cdot \frac{\ell}{3^n}$

(b) Não, pois tende ao infinito

A primeira, terceira e quarta tendem a um valor específico (zero). A primeira e a última não, pois tendem ao infinito. Uma sequência cresce e a outra

Fonte: arquivo da pesquisadora.

Durante a mediação do processo, os participantes discutiram, observaram e concluíram sobre as interações. A maior dificuldade foi encontrada na área de cada objeto fractal a partir da dimensão D, ainda um tanto quanto incompreensível para eles. Os participantes P1 e P2 encontraram dificuldades na identificação da área e do perímetro e preencheram o quadro até a 2 iteração, como pode ser observado na Figura 7.

Figura 7. Registro de P3.

Fonte: arquivo da pesquisadora.

Considerações finais

Descreveu-se, neste artigo, um fragmento de uma pesquisa de mestrado profissional que teve o objetivo geral investigar quais as contribuições do uso de representação de fractais, quando utilizadas para introdução de sequências numéricas, podem ser obtidas com licenciandos em Matemática.

A fim de cumprir com tal objetivo, foi elaborado e levado a cabo um projeto piloto, objeto deste artigo, o qual buscou vislumbrar erros e acertos, a fim de propor as atividades nele constantes, num segundo momento, aos licenciandos, com correção de rumos para validar o instrumento de coleta de dados.

Julgou-se importante utilizar o recurso de aplicação a um grupo de professores de Matemática que possuem conhecimentos de Cálculo e que mostraram, em um questionário inicial, algum conhecimento sobre Geometria Fractal, de modo não formal.

A realização dessa atividade permitiu, ao final de sua aplicação e análise do material coletado, uma reflexão acerca do que ocorreu durante sua aplicação. Isso proporcionou compreender um pouco mais a respeito da ação e da mediação do processo de identificação dos conceitos envolvidos, a saber, sequências numéricas introduzidas a partir da construção do fractal Floco de Neve de Koch.

Nesta perspectiva, destaca-se que a iteração com os participantes e a discussão sobre as atividades acrescentaram pontos positivos à formação da ideia central da dissertação, o que Freire (1996) trata sobre o ensinar, não como transferência de conhecimento, mas a criação de possibilidades para sua produção e construção, o que parece ter ocorrido no projeto piloto.

Analisando os dados obtidos, constatou-se que os participantes conheciam os fractais, porém não haviam estudado a Geometria Fractal do ponto de vista matemático. Na construção do fractal, houve a possibilidade de retomar conceitos matemáticos e adquirir conhecimento referente a fractais e, dessa forma, experimentar, criar estratégias de construção de figuras, estabelecer conjecturas e fazer com que os professores formalizassem suas ideias com o auxílio do pesquisador.

A realização do encontro com os docentes pode não ter acarretado grandes alterações nas suas concepções, contudo, julga-se que houve contribuição para que eles, num segundo momento, pudessem incorporar, em suas práticas docentes, formas de introdução do conteúdo, em especial com a utilização da Geometria Fractal. Nesse sentido, confirma-se o preconizado por Azambuja (1999), de que oficinas pedagógicas constituem uma metodologia ativa, na qual os participantes aprendem fazendo, organizando-se em torno de um projeto, o que foi objetivo do piloto, para vislumbrar erros e acertos. a fim de propô-la, num segundo momento, aos licenciandos. Além disso, o “investigar”, como busca de compreensão de algo de forma mais aprofundada, como indicado em Houaiss e Villar (2009), parece ter acontecido, uma vez que os professores tinham algum conhecimento do assunto da oficina, entretanto, não o aplicavam em suas práticas e puderam aprofundar o tema na oficina.

Por fim, salienta-se que a atividade foi um começo para o despertar do pesquisador, sendo um passo para a continuidade do trabalho na busca de alcançar o objetivo da pesquisa.

Referências

ANTON, H. **Cálculo, um novo horizonte**. 6. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

AZAMBUJA, C. R. J. **Oficina pedagógica de matemática da PUCRS contribuições à prática de professores de matemática do ensino fundamental e médio**. Dissertação (Mestrado em Educação), Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1999.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal para sala de aula**. Belo Horizonte: Editora Autentica. Coleção Tendências Em Educação Matemática, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena**. Brasília, DF, 2002. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf>. Acesso em 08 mai. 2016.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática**: da Teoria à Prática. 4. ed. Campinas: Papirus, 1996.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**. Saberes necessários à prática educativa, 15. ed. São Paulo: Editora Paz e Terra, 1996.

GUILLEN, M. **Pontes para o infinito:** o lado humano das matemáticas. Lisboa: Gradiva, 1998.

HOUAISS, A; VILLAR, M. de S., et al. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Objetiva Ltda, 2009.
XXX

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, v. 3, 1º semestre, 1995. Disponível em <http://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO_20ENSINAR_20GEOMETRIA.pdf>. Acesso em 12 set. 2016

MANDELBROT, B. P. **Objetos Fractais**. Lisboa: Editora Gradiva, 1998.

PONTE, J.P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

SWOKOWSKI, E.W. **Cálculo com Geometria Analítica**, v.2, 2. ed. São Paulo: Editora Makron Books do Brasil. 1994.

Revisão gramatical realizada por: André Firpo Beviláqua.
E-mail: andre.firpo@gmail.com**.**

RECEBIDO 24 DE JUNHO DE 2017.
APROVADO 20 DE AGOSTO DE 2020.