



## CARTA AO PROFESSOR ORI SOBRE O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DOS CAITITÉS

Gisele Mezzari Silveira<sup>1</sup>

*Caros colegas,*

*Como vocês sabem, estou em luaip, país maravilhoso, para conhecer os avanços dos seus acadêmicos em Matemática. Já participei do primeiro seminário. O nosso tema foi a descoberta de um sistema de numeração de uma comunidade chamada de Caitité. Os renomados professores Ovatsug e Oigres apresentam as suas descobertas iniciais baseadas em escritas que parecem representar os bens de um rico senhor daquela comunidade. Os professores disseram que foi possível perceber que as quantidades de um a doze, em ordem crescente, podem ser representadas da seguinte forma: <, +, N, <I, <<, <+, <N, +I, +<, ++, +N, NI. Descobriram também que o povo Caitité, embora não tenha desenvolvido muito matematicamente, já tinha um símbolo para o zero: I*

*Os professores mostraram uma inscrição que apresentava a figura de um jegue seguida dos símbolos +N<. Supomos que quem fez estava querendo comunicar o valor do jegue.*

*No próximo seminário pretendemos descobrir a lógica do sistema de numeração dos Caitités. Acreditamos que isso poderá trazer grande contribuição para entender a cultura desse povo. Estou enviando-lhes este resumo do que já presenciei porque sei o quanto vocês ficarão desafiados para encontrar uma solução geral para o problema que estamos investigando.*

*Peço-lhes que procurem descobrir qual o sistema de numeração dos Caitités, pois isso daria grande prestígio para nossa academia. Se vocês conseguirem descobrir, escrevam, com os nossos numerais, quanto custa o jegue e escrevam também quanto seria 23 e 203 em escrita Caitité. Vocês podem mandar a resposta por e-mail. O meu endereço eletrônico aqui é: modmoura@usp.br*

*Saudações universitárias,*

*Manoel Oriosvaldo de Moura (Ori)*

Caríssimo professor Ori,

Sou mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Sul de Santa Catarina (UNISUL). Recebi sua carta por meio do livro produzido pelo GEPAPe

<sup>1</sup> Estudante do Programa de Pós-Graduação em Educação – Mestrado da Universidade do Sul de Santa Catarina, orientada pela professora Dra. Josélia Euzébio da Rosa e integrante do GPEMAHC (Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural). E-mail: <[giselemezzari@hotmail.com](mailto:giselemezzari@hotmail.com)>.

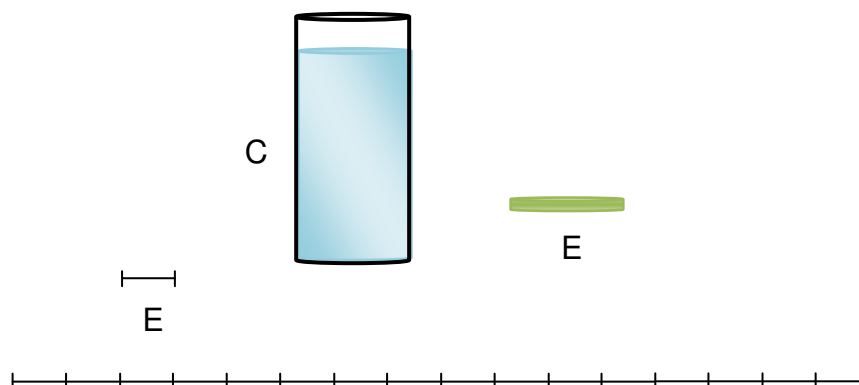


(Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Atividade Pedagógica), sob o título *A **atividade pedagógica** na teoria histórico-cultural*.

Ao ler sua carta, constatei que os Caitités utilizam o símbolo *I* para representar o algarismo zero (0), o *<* para o algarismo *um* (1), o *+* para o *dois* (2) e *N* para o *três* (3). Para representar o algarismo quatro (4), eles utilizam *<l*; ou seja, *um* e *zero* (10) - uma unidade de segunda ordem e nenhuma unidade de primeira. Deste modo, o sistema de numeração por eles utilizado é o quaternário.

Professor, para responder às questões que você apresenta na carta, partirei de um exemplo que envolve a medição de um determinado volume de líquido com a unidade de medida **E** (Ilustração 1). A título de explicitação do processo, representarei a medição no esquema:

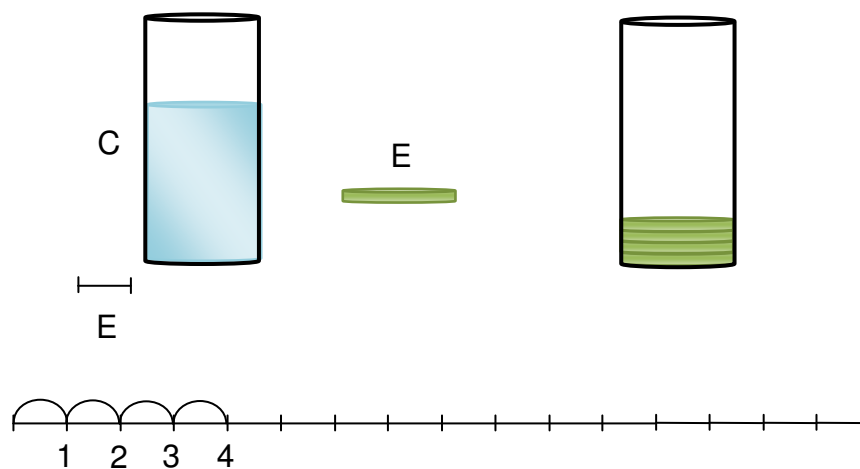
Ilustração 1 - Volume de líquido a ser medido



Fonte: Elaboração nossa com base em Davýdov

Como a base numérica utilizada pelo povo Caitité é a quaternária, inicialmente procederei a contagem somente até quatro (Ilustração 2):

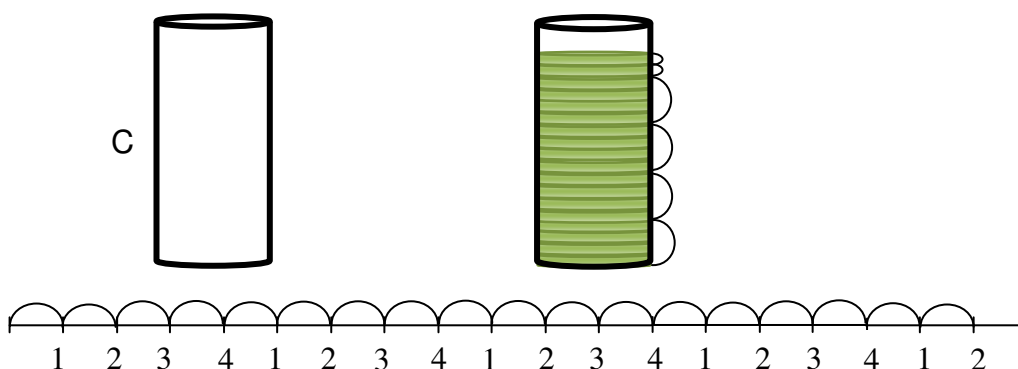
Ilustração 2 - Quatro medidas E



Fonte: Elaboração nossa com base em Davýdov

Na continuidade da medição a contagem foi reiniciada a partir do número *um*, pois ainda há líquido a ser medido. Este processo se repete até que todo o líquido seja medido, conforme ilustração 3:

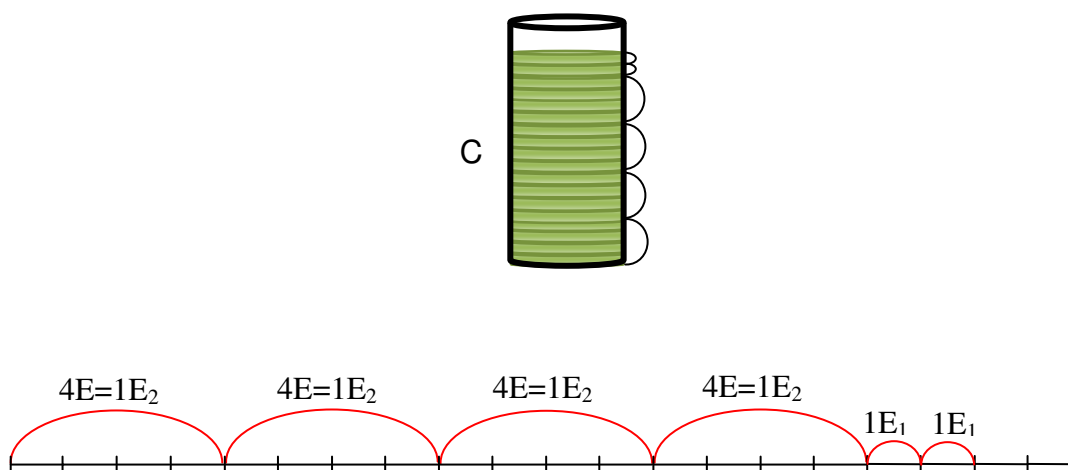
Ilustração 3 - Resultado da medição do volume de líquido



Fonte: Elaboração nossa com base em Davýdov

Por meio da análise do registro no esquema (Ilustração 3), é possível concluir que foram adicionadas quatro medidas  $E$ , mais quatro medidas  $E$ , novamente quatro medidas  $E$ , outra vez quatro medidas  $E$  e, ao final do processo, mais duas medidas  $E$ . Assim, podemos considerar  $4E$  como nova unidade de medida ( $E_2$ ), uma unidade de medida de segunda ordem (Ilustração 4):

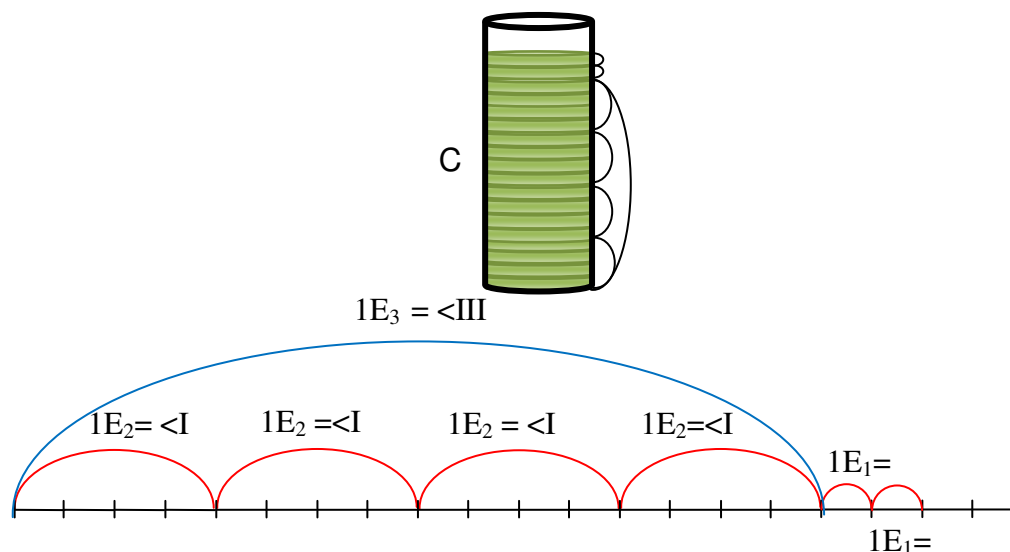
Ilustração 4 - Unidade de medida de segunda ordem ( $4E$ )



Fonte: Elaboração nossa com base em Davýdov

Durante o processo de medição formei quatro unidades de medida de segunda ordem. Porém, assim como quatro unidades de primeira ordem compõem uma de segunda, quatro de segunda constituem uma de terceira. Por isso reagruparei as unidades de segunda ordem conforme ilustração 5.

Ilustração 5 - Construção da terceira ordem de medida

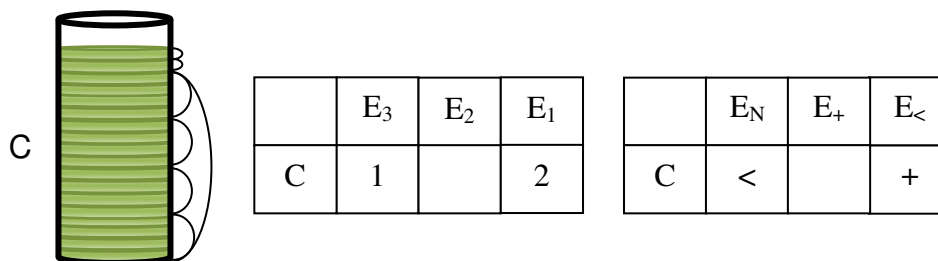


Fonte: Elaboração nossa com base em Davýdov

Na ilustração 5 também registrei as unidades de primeira, segunda e terceira ordem com os símbolos utilizados pelos Caititês. Construí a unidade de medida de segunda ordem a partir da unidade de primeira ordem e a de terceira, a partir da unidade de segunda ordem. Deste modo, o volume de líquido mede: *uma* unidade de medida de terceira ordem; *nenhuma* de segunda, pois todas foram reagrupas; e *duas* unidades de medida de primeira.

Para o registro do processo de medição no quadro valor de lugar (Ilustração 6), faz-se necessário o uso de uma simbologia que represente as unidades de medida de primeira, segunda e terceira ordem. Para tanto, será necessário utilizar a mesma letra (**E**) para as três unidades de medida. Para diferenciá-las apresentarei os numerais em subscrito 1, 2, 3 e <, +, N (símbolos hindu-arábicos e caititeanos, respectivamente); o número *um* para representar a unidade de medida de primeira ordem ( $E_1$ ,  $E_{\langle}$ ), o *dois* para a de segunda ordem ( $E_2$ ,  $E_{+}$ ), e o *três* a de terceira ( $E_3$ ,  $E_N$ ).

Ilustração 6 - Registro no quadro valor de lugar

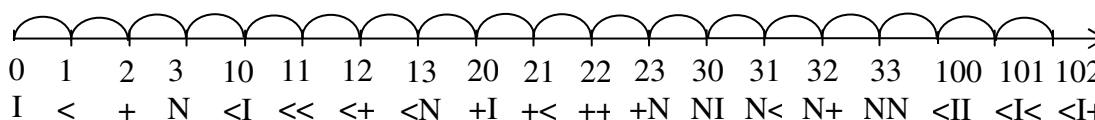


Fonte: Elaboração nossa com base em Davýdov

Para registrar o resultado da medição no quadro valor de lugar, foram necessários dois numerais: um (1 ou <) e dois (2 ou +). O numeral *dois* indica a quantidade de unidades de medida de primeira ordem e o numeral *um* indica a quantidade de unidade de medida de terceira ordem. O registro deste resultado fora do quadro de valor requer um símbolo que represente o espaço vazio do quadro. Tanto os hindu-arábicos quanto os Caitités, criaram este símbolo, o zero (0, I). Deste modo, fora do quadro, o registro é feito do seguinte modo: 102 e <I+.

Assim, podemos constatar que o sistema de numeração possui uma lógica que é inerente a todas as bases numéricas que o compõem. Neste, a composição de cada ordem de medida é determinada pela base numérica considerada. Logo, cada ordem a partir da primeira será **n** vezes a anterior (**n** é a base considerada). Esta também determina o valor máximo que cada ordem poderá conter, pois, cada vez que esse valor atingir o da base utilizada, uma nova ordem será formada. A partir desta lógica, é possível registrar cada sistema numérico particular na reta numérica, e também suas diferentes simbologias, conforme a ilustração 7:

Ilustração 7 - Registro do sistema quaternário na reta numérica com símbolos



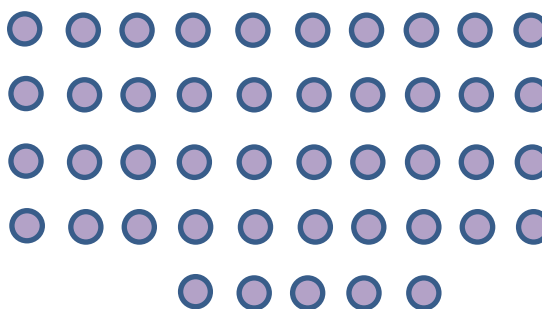
hindu-arábicos e caititeanos

Fonte: Elaboração nossa

Quanto ao custo do jegue (+N<), o registro indica que: é *uma* unidade de medida de primeira ordem (<), *três* de segunda (N) e *duas* de terceira (+). Com base nos algarismos hindu-arábicos, temos o seguinte registro:  $231_{(4)}$ . Conforme mencionado anteriormente, a base numérica utilizada pelo povo de Caitité é a quaternária; conseqüentemente, cada unidade de medida de segunda ordem é composta por quatro vezes a de primeira (quatro unidades); e a de terceira, quatro vezes a de segunda (dezesseis unidades). No sistema decimal o valor do jegue será: *uma* (1) unidade de primeira ordem mais três vezes quatro ( $4 \times 3$ ), pois cada unidade de medida de segunda ordem é quatro vezes a de primeira, por conseguinte, *doze* (12) unidades; mais duas vezes dezesseis ( $2 \times 16$ ), cada unidade de terceira ordem e quatro vezes a de segunda, que é composta por quatro unidades ( $4 \times 4 = 16$ ), o que corresponde a *trinta e duas* (32) delas. Portanto, o valor do jegue no sistema decimal é ( $1 + 12 + 32 = 45$ ): quarenta e cinco.

A título de ilustração, este valor foi representado por meio de unidades discretas, na base numérica quaternária e decimal, conforme a ilustração 8:

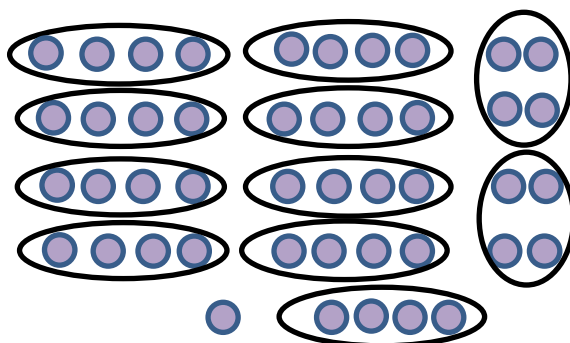
Ilustração 8 - Unidades discretas



Fonte: Elaboração nossa com base em Davýdov

Iniciarei a contagem dos objetos (Ilustração 9) na base numérica quaternária utilizada pelos caítiteanos.

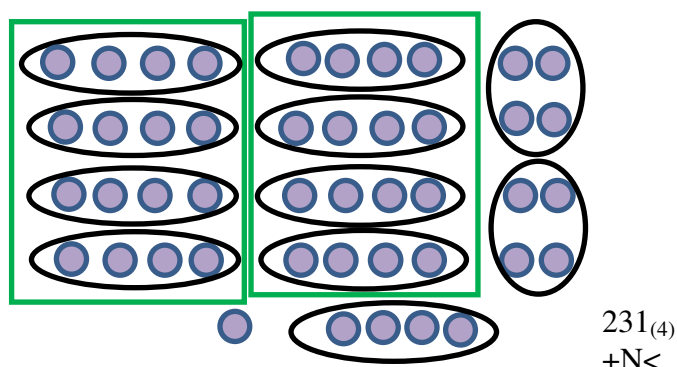
Ilustração 9 - Contagem na base numérica quaternária



Fonte: Elaboração nossa com base em Davýdov

Durante o processo de contagem, os agrupamentos foram sempre compostos por quatro unidades; assim, resultou em onze agrupamentos e sobrou uma unidade sem ser agrupada. A base numérica considerada pelos Caitités é a quaternária, por isso não é possível registrar onze unidades de medida de segunda ordem. Deste modo, é necessário reagrupar as unidades de segunda ordem (Ilustração 10).

Ilustração 10 - Reagrupamento de segunda ordem



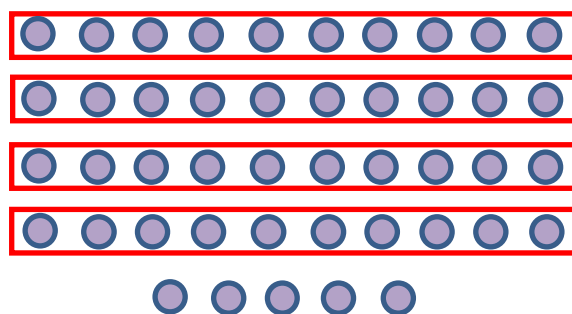
Fonte: Elaboração nossa com base em Davýdov

Do procedimento de reagrupamento das unidades de medidas de segunda ordem formaram-se *duas* unidades de terceira ordem. Agora já é possível, registrar o resultado do processo de contagem com algarismos hindu-arábicos e com os símbolos caititeanos:  $231_{(4)}$  e  $+N<$ . Em ambos os registros temos *duas* (2) unidades de medidas de terceira ordem, *três* (3) de segunda e *uma* (1) de primeira.



Procederei a contagem da mesma quantidade; porém, no sistema numérico decimal e registrarei com algarismos hindu-arábicos (Ilustração 11). Não será registrado com os símbolos caititeanos, pois estes possibilitam o registro somente até a base quaternária; a partir da base quinária (5), esse povo não dispõe de símbolos, assim como o sistema decimal, que possibilita somente o registro de bases numéricas até dez. Se utilizássemos a base duodecimal (12), por exemplo, a partir dos algarismos decimais, também faltariam símbolos.

Ilustração 11 - Contagem sistema decimal



45

Fonte: Elaboração nossa com base em Davýdov

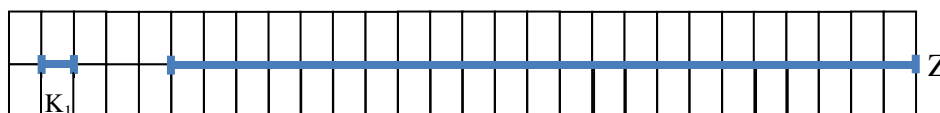
A mesma quantidade de objetos (Ilustração 10), porém na base decimal (Ilustração 11), resulta em: *quatro* unidades de medidas de segunda ordem e sobram *cinco unidades* sem serem agrupadas (quarenta e cinco). Ou seja, a quantidade de ordens que se formam durante o processo de contagem/medição depende da base numérica considerada. O valor do jegue, na base quaternária, resulta em três ordens; e na base decimal, em apenas duas.

Outra questão que o senhor menciona na carta é em relação aos numerais 23 e 203 que, na escrita com os símbolos do povo de Caitité consistem em *+N* e *+IN*, respectivamente. Conforme já mencionei, o valor depende da base numérica considerada. No sistema decimal, o registro 23 representa *três* unidades de medidas de primeira ordem (não chegou a formar grupo com dez unidades) e *duas* unidades de medidas de segunda ordem (cada unidade é composta por dez unidades). O número 203 é composto por *três* unidades de medida de primeira ordem, *nenhuma* de segunda (todas de segunda foram

reagrupadas em unidades de terceira ordem) e *duas* de terceira (cada unidade é composta por cem unidades, ou seja, dez vezes a ordem anterior). O mesmo ocorre no sistema numérico quaternário (dos Caititês), assim como para qualquer outra base numérica, o que varia é o valor dos agrupamentos. Os algarismos 23, na base quatro, também representam *três* unidades de medida de primeira ordem e *duas* unidades de segunda ordem. Entretanto, significa que as três unidades não formaram grupos compostos por quatro unidades, e as duas unidades são formadas por quatro unidades cada. O mesmo ocorre com o número 203, *cada ordem de medida, a partir da primeira, será composta por quatro vezes a anterior.*

Professor Ori, você também solicita a escrita do número 23 em Caitité. Para tanto, utilizarei, a título de elucidação, um comprimento de medida: Z, composto por 23 unidades (na base dez) para serem reagrupadas na base quaternária. A unidade de medida de primeira ordem será uma unidade de comprimento da malha ( $K_1$ ), conforme a ilustração 12:

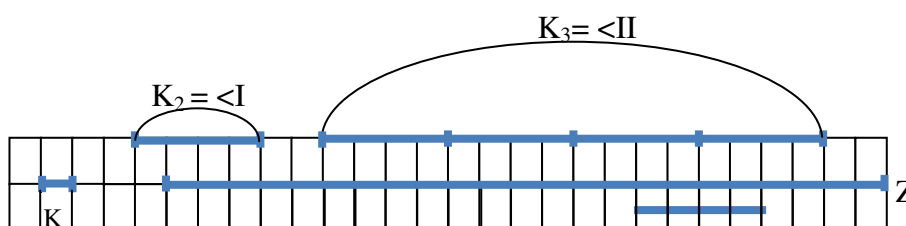
Ilustração 12 - Reagrupamento na base quaternária



Fonte: Elaboração nossa com base em Davýdov

Para realizar a medição, procederei o movimento inverso àquele realizado anteriormente - primeiro construirei as unidades de medida de segunda e terceira ordem. Como a base numérica é a quaternária, a unidade de medida de segunda ordem será quatro vezes a de primeira; e a de terceira, quatro vezes a de segunda (Ilustração 13):

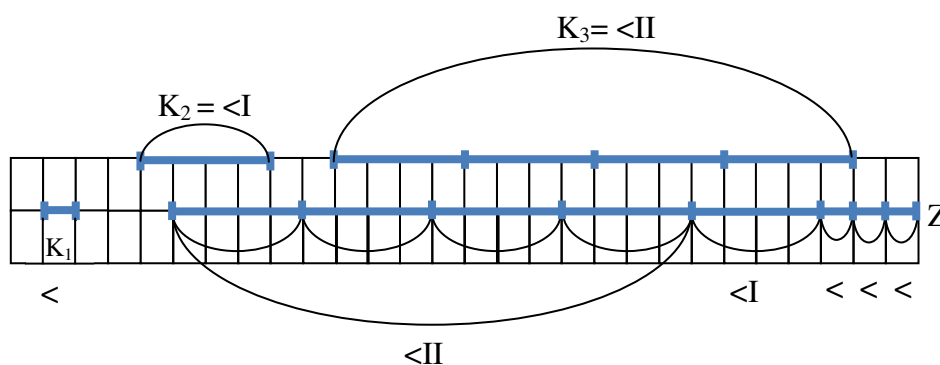
Ilustração 13 - Construção das unidades de segunda e terceira ordem



Fonte: Elaboração nossa com base em Davýdov

A partir das unidades de medida construídas anteriormente (Ilustração 13),  
 procederei a medição (Ilustração 13):

Ilustração 14 - Medição com base nas unidades já construídas



$$Z = \ll N$$

Fonte: Elaboração nossa com base em Davýdov

As *vinte e três* unidades reagrupadas na base quatro resultaram em: *uma* de terceira ordem, *uma* de segunda e *três* de primeira;  $113_{(4)}$  ou  $\ll N$ .

De modo análogo ocorre com numeral duzentos e três (203). Este, na base decimal, corresponde a *duas* unidades de medida de terceira, *nenhuma* de segunda e *três* de primeira ordem. Duzentos e três (203), reagrupado a partir da base quaternária, consiste em *três* unidades de quarta ordem, *nenhuma* de terceira, *duas* de segunda e *três* de primeira. Seu registro com os símbolos hindu-arábicos e caititeanos são  $3023_{(4)}$  e  $NI+N$ , respectivamente.

Conforme você já anuncia em sua carta quando menciona a “solução geral”, embora o povo de Caitité utilize símbolos e base numérica diferente da nossa (decimal), a essência é a mesma, como também a lógica interna. Consiste em que cada ordem é formada por  $n$  vezes a anterior, e  $n$  é determinado pelo valor da base considerada. Esta lógica é válida para qualquer base numérica.

Gisele Mezzari Silveira

Para finalizar, gostaria mais uma vez de agradecer por este desafio. Refletir sobre a base numérica adotada pelos caitités me ajudou a compreender melhor a base numérica que geralmente utilizo - a decimal.

Um abraço,

Gisele Mezzari Silveira (Gi).