



ORGANIZAÇÃO DO ENSINO QUE POSSIBILITA A REVELAÇÃO DA GÊNESE DO CONCEITO DE FRAÇÃO EM NÍVEL TEÓRICO

Josélia Euzebio da Rosa¹

<https://orcid.org/0000-0001-5738-8518>

Juliana Nobre Nóbrega²

<https://orcid.org/0000-0002-2668-192X>

Marlene da Rocha Migueis³

<https://orcid.org/0000-0003-1394-9955>

RESUMO

A presente pesquisa teve origem a partir de angústias que desencadearam a necessidade de refletirmos sobre as possibilidades de superação do modo de organização no qual predomina o conhecimento empírico. Investigamos se a organização do ensino por meio dos movimentos de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto possibilita a revelação, por parte dos estudantes, da gênese do conceito de fração em nível teórico. Adotamos como método de pesquisa o materialismo histórico-dialético. Concluímos que a organização do ensino por meio dos movimentos de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto possibilita a revelação, por parte dos estudantes, da gênese do conceito de fração em nível teórico.

Palavras-chave: Ensino Desenvolvidor; Atividade Orientadora de Ensino; Educação Matemática; Fração.

TEACHING ORGANIZATION THAT ENABLES THE REVELATION OF THE GENESIS OF THE FRACTION'S CONCEPT AT THE THEORETICAL LEVEL

ABSTRACT

¹ Licenciatura em Matemática (UNESC - 2004), Mestrado (2006) e Doutorado (2012) em Educação, linha de pesquisa Educação Matemática pela UFPR. Professora e pesquisadora com vínculo pela UniSul. As pesquisas incidem no modo de organização do ensino de Matemática. Atua na graduação (Pedagogia e Matemática), Mestrado e Doutorado em Educação. Integrante da Academia Internacional de Estudos Histórico-Cultural. Líder do TedMat (Unisul) e vice-líder do GPEMAHC (UNESC). E-mail: <joselia.euzebio@yahoo.com.br>

² Graduação em Engenharia Civil - Cesmac - Centro de Estudos Superiores de Maceio - AI (2009); Graduação em Matemática - Claretiano Centro Universitário (2018); Graduação em Pedagogia - FCE - Centro Universitário FIEO (2019). Pós-graduação lato sensu em Metodologia do Ensino de Matemática - Faculdade Batista de Minas Gerais (2020); Pós-graduação lato sensu em Educação Infantil e Educação Inclusiva Especial - Faculdade Batista de Minas Gerais (2020); Pós-graduação lato sensu em Gestão Escolar Integradora: Administração, Inspeção, Orientação e Supervisão - Faculdade Batista de Minas Gerais (2020), Curso de Capacitação Profissional em Educação Inclusiva, com carga horária de 240 horas - Faculdade Batista de Minas Gerais (2020); Curso de Extensão Universitária em Práticas Pedagógicas das Séries Iniciais, com 70 horas - Faculdade Campos Elíseos (2021); Curso de Extensão Universitária em Alfabetização e Educação com 70 horas - Faculdade Campos Elíseos (2021); Mestra em Educação (2021) - UNISUL. E-mail: <juju_engenheira@hotmail.com>

³ Pós-doutorado em Educação (2017) pela Universidade de São Paulo, Doutorado em Ciências da Educação (2016) pela Universidade de Aveiro. É Professora Auxiliar no departamento de Educação e Psicologia da Universidade de Aveiro. Atua na(s) área(s) de Ciências Sociais com ênfase em Ciências da Educação (formação inicial e contínua de professores; supervisão e aprendizagem docente, educação matemática na infância) e Ciências Sociais com ênfase em Psicologia Geral. Atualmente faz parte da equipa do consórcio responsável pelo Projeto Limites Invisíveis, sendo co-responsável pelo Projeto Pro(g)natura (parceria com o projeto Limites Invisíveis), no qual se desenvolvem atividades no âmbito do 1º Ciclo do ensino Básico. E-mail: <mmigueis@ua.pt>

This research originated from fears that triggered the need to reflect on the possibilities of overcoming of the organization mode in which empirical knowledge predominates. We investigate whether the organization of teaching through movements to reduce concrete to abstract and ascending from abstract to concrete enables students to reveal the genesis of fraction's concept at a theoretical level. We adopted the dialectical-historical materialism as a research method. We conclude that the organization of teaching through movements to reduce the concrete to the abstract and ascending from the abstract to the concrete makes it possible for students to reveal the genesis of the fraction's concept at a theoretical level.

Keywords: Developmental; Teaching; Teaching Guiding Activity; Mathematics Education; Fraction.

ORGANIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA QUE PERMITE DESVELAR LA GÉNESIS DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN A NIVEL TEÓRICO

RESUMEN

La presente investigación se originó a partir de angustias que desencadenaron la necesidad de reflexionar sobre la posibilidad de superación del modo de organización en el que predomina el conocimiento empírico. Investigamos se la organización de la enseñanza a través de los movimientos de reducción del concreto a lo abstracto y elevación del abstracto a lo concreto hace posible la revelación, por parte de los estudiantes, de la génesis del concepto de fracción en nivel teórico. Adoptamos como método de investigación el materialismo histórico-dialéctico. Concluimos que la organización de enseñanza a través del movimiento de reducción del concreto a lo abstracto y elevación del abstracto a lo concreto hace posible la revelación, por parte de los estudiantes, de la génesis del concepto de fracción en nivel teórico.

Palabras clave: Enseñanza del Desarrollo; Actividad de Orientación de Enseñanza; Educación Matemática; Fracción.

INTRODUÇÃO

Tendo por base a necessidade das novas gerações de apropriação dos conhecimentos teóricos produzidos historicamente pela humanidade, surgiram a atividade pedagógica como unidade da atividade de ensino realizada pelo professor e a atividade de estudo realizada pelos escolares (MOURA et al., 2016). Para a organização da atividade pedagógica, Moura et al. (2010) propõem a Atividade Orientadora de Ensino e Davíдов (1982, 1988), a Teoria do Ensino Desenvolvimental. Ambas fundamentadas na Teoria Histórico-Cultural a partir de Vigotski e na Teoria da Atividade de Leontiev (ROSA e FONTES, 2022).

Por outro lado, no modo de organização do ensino brasileiro, predomina, em geral, o desenvolvimento do pensamento empírico (ROSA; MARCELO, 2022). As dificuldades manifestadas pelos alunos, tanto da Educação Básica quanto do Ensino Superior, ao se depararem com os conhecimentos matemáticos, em geral, e com as frações em particular

deram origem à investigação apresentada no presente artigo. De acordo com Santos (2017), os estudantes brasileiros, de modo geral, concebem fração empiricamente como representante direto de imagens referentes à divisão de pizzas, chocolates, bolos, etc. Tal conhecimento resulta da contagem de pedaços que a unidade foi subdividida.

Assim, a fração é introduzida no ensino, em geral, a partir da contagem da grandeza discreta. Cada número emerge da representação visual externamente e explicitamente dada aos órgãos dos sentidos. Esse movimento de conhecimento resulta na formação de conhecimentos empíricos.

O desafio consiste em organizar o ensino de modo a favorecer nos estudantes a assimilação dos conhecimentos teóricos e o desenvolvimento do correspondente pensamento. Diante deste desafio, debruçamo-nos no modo de organização do ensino para a introdução da fração. A fração faz parte dos números racionais e surgiu historicamente a partir da necessidade humana de medir (CARAÇA, 1951). Portanto, foi essa necessidade que tomamos como ponto de partida para a organização do ensino que desenvolvemos em caráter investigativo.

Assumimos como tarefa de estudo a introdução dos estudantes na esfera das relações entre grandezas contínuas, mais especificamente, a formação de compreensão da gênese da fração como número derivado do processo de medição de comprimento.

Mas, como conduzir o movimento de formação da compreensão da gênese da fração, por parte dos estudantes, como derivado do processo de medição de comprimento, à luz da Teoria do Ensino Desenvolvimental e da Atividade orientadora de Ensino? No processo de busca para esse problema, definimos como objetivo de pesquisa: investigar se a organização do ensino por meio dos movimentos de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto possibilita a revelação, por parte dos estudantes, da gênese do conceito de fração em nível teórico.

CONTEXTUALIZAÇÃO TEÓRICA

Na estrutura da atividade humana coexiste, em unidade indissociável, a dimensão orientadora e outra executora. Os elementos que, relacionados de modo indissociável, constituem a relação que dá movimento à dimensão orientadora são: necessidade, motivo e

objeto. Esta dimensão orientadora é concretizada pela dimensão executora, constituída por ações, operações e objetivos. Os componentes da estrutura da atividade estão em permanente estado de interconexão e transformação (MOURA et al., 2016).

Na dimensão orientadora da atividade pedagógica, o conteúdo e a necessidade consistem na apropriação, por parte das novas gerações, dos conhecimentos teóricos produzidos historicamente pela humanidade. A necessidade incita os estudantes a assimilarem seu conteúdo: os conhecimentos teóricos. O motivo estimula os sujeitos a executarem as atividades de ensino e estudo. O objeto do professor é o ensino e o do escolar é o estudo (MOURA et al., 2016).

Mas, quando surge a necessidade de apropriação dos conhecimentos teóricos? Ao chegar à escola, a criança ainda não experimenta a necessidade de conhecimentos teóricos. Esta necessidade, como base psicológica da atividade de estudo, surge na dimensão executora da atividade pedagógica (DAVÍDOV, 1988).

O objetivo da atividade de estudo consiste na satisfação da necessidade de apropriação dos conhecimentos teóricos, pelas novas gerações, durante a solução de tarefas de estudo, as quais são realizadas pelos estudantes, coletivamente, por meio do cumprimento de ações (DAVÍDOV, 1988).

O caminho para formar, nos escolares, o procedimento generalizado de formação do conhecimento vai da redução do concreto ao abstrato e depois o caminho inverso, de ascensão do abstrato ao concreto. De acordo com o Kopnin (1978, p. 163), o movimento de redução do concreto ao abstrato e a ascensão do abstrato ao concreto é a “lei universal do desenvolvimento do conhecimento humano”. A redução do concreto ao abstrato ocorre durante a análise. No movimento de síntese, se realiza a reprodução teórica do concreto real, como unidade do diverso, pelo procedimento de ascensão do abstrato ao concreto.

Na atividade de estudo, “se conservam, em forma peculiar, as situações e ações que eram inerentes ao processo de criação real dos conhecimentos teóricos” (DAVÍDOV, 1988, p. 176). Tais situações, à luz da Atividade Orientadora de Ensino, denomina-se situação desencadeadora de aprendizagem. Esta pode ter forma de uma história que reconstitui virtualmente “problemas semelhantes àqueles vividos historicamente pelos seres humanos” (MOURA; ARAUJO; SERRÃO, 2019, p. 423).

As necessidades humanas, que geraram os conhecimentos ao longo da história da humanidade, são tomadas como elemento desencadeador (MOURA, 2017). Parte-se da concepção de “criança como um ser capaz de criar formas e meios de resolução de problemas a partir de situações com as quais, guardadas as proporções, a humanidade já se deparou, e, por isso, constitui uma história virtual de um conceito” (MOURA; ARAUJO; SERRÃO, 2019, p. 424-425). Assim como a tarefa de estudo, a situação desencadeadora de aprendizagem deve “garantir momentos de análise e síntese do problema de aprendizagem em desenvolvimento” (MOURA, 2017, p. 122). Uma situação desencadeadora de aprendizagem “é o conjunto de ações e operações” (MOURA; ARAUJO; SERRÃO, 2019, p. 424).

Durante a realização das ações de estudo, os escolares revelam as condições de origem do conhecimento que em processo de assimilação. “É como se os próprios escolares construíssem o conceito, ainda que sob a direção sistemática do professor (ou ao mesmo tempo, o caráter desta direção muda gradualmente e cresce, também gradualmente, o grau de autonomia exibido do estudante)” (DAVÍDOV, 1988, p. 184). As ações de estudo correspondentes à finalidade da tarefa, de acordo com Davídov (1988, p. 181), são: 1. transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto estudado; 2. modelação da relação diferenciada em forma objetual, gráfica ou por meio de letras; 3. transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades em forma pura; 4. construção do sistema de tarefas particulares concretas a serem resolvidas por um procedimento geral.

Além das ações de estudo, também existem as ações de controle e avaliação. As ações de estudo são subordinadas a uma finalidade cognoscitiva, cujo resultado são os conhecimentos teóricos obtidos por seu intermédio. A ação da avaliação, realizada tanto pelo professor quanto pelos estudantes, orienta-os para este resultado final.

Cada ação de estudo é formada pelas correspondentes operações. A tarefa de estudo é diferente de tarefas particulares. Nos limites do conhecimento empírico, os estudantes resolvem várias tarefas particulares e dominam procedimentos particulares de solução.

A assimilação do procedimento empírico de solução se realiza por meio da passagem do pensamento do particular para o geral. No processo de assimilação dos conhecimentos em nível teórico, o movimento é inverso, do geral para o particular. Ao

resolverem a tarefa de estudo, os estudantes dominam, nas três primeiras ações de estudo, o procedimento geral de solução de tarefas particulares. A solução da tarefa de estudo é importante não apenas para um caso particular, mas para todos os casos do mesmo tipo. Por isso, na quarta ação de estudo ocorre a construção do sistema de tarefas particulares concretas a serem resolvidas pelo procedimento geral revelado na primeira ação, modelado na segunda e transformado na terceira ação de estudo.

O desenvolvimento das quatro ações de estudo, sob orientação do professor, conduz os estudantes na esfera do conhecimento teórico. A natureza específica da tarefa de estudo consiste no fato de que, por meio da resolução de problemas, as crianças passam a dominar um modo geral de resolução de todas as tarefas particulares de certo um tipo. As disciplinas escolares dos anos iniciais devem corresponder às diferentes características da atividade de estudo e estimular nas crianças “o desenvolvimento do pensamento teórico” (DAVÍDOV, 1988, p. 245).

Entendemos que o modo de organização de ensino contemporâneo deve favorecer a formação, nos estudantes, dos conhecimentos teóricos por meio de abstrações e generalizações que substanciem a dedução de conceitos em nível teórico. Neste processo, os conhecimentos empíricos são incorporados e superados.

Segundo Davídov (1982), os conhecimentos empíricos geram, nos estudantes, o desenvolvimento do pensamento empírico, os conhecimentos teóricos, por sua vez, favorecem a formação do pensamento teórico. Além disso, Davídov (1988) adverte que os conhecimentos empíricos obstaculizam a formação dos conhecimentos teóricos. Portanto, o conhecimento empírico não é ponto de partida para chegar ao conhecimento teórico.

Não se deve confundir empírico com concreto real e teórico com abstrato, como comumente se faz (KOPNIN, 1978). Tanto o conhecimento empírico quanto o teórico partem do real, concretamente dado e seguem em direção ao abstrato. A diferença está no conteúdo da essência que é abstraída e generalizada a partir do concreto real. Nos limites do conhecimento empírico, a essência é separada com base a comparação de diferentes objetos e fenômenos, considerando sua aparência externa. O teórico vai além da aparência externa e adentra na essência, nas relações e conexões internas que dão origem às diferentes manifestações particulares e singulares.

METODOLOGIA

Consideramos como método de pesquisa o materialismo histórico-dialético. Em consonância com o método de pesquisa, apresentamos os dados de pesquisa, a análise e o referencial teórico em unidade dialética. Trata-se de uma pesquisa experimental, em termos metodológicos, optamos pelo experimento didático desenvolvimental (DAVÍDOV, 1988). Optamos por esta metodologia por possibilitar ao pesquisador investigar o movimento de pensamento dos estudantes no processo de resolução da tarefa de estudo. De acordo com Davídov (1988), o experimento didático desenvolvimental caracteriza-se pela intervenção ativa do pesquisador nos processos que ele investiga e “aparece como metodologia de educação e ensino experimentais que impulsionam o desenvolvimento” (DAVÍDOV, 1988, p. 196).

Projetamos, executamos e analisamos o experimento didático, em colaboração, no coletivo de pesquisa, com base na Teoria do Ensino Desenvolvimental e na Atividade Orientadora de Ensino. Desse modo, orientamos o processo de solução da tarefa de estudo a partir de uma história virtual do conceito, cujo problema desencadeador reflete a necessidade histórica que deu origem ao conceito de fração. No processo de resolução do problema, percorremos as quatro ações de estudo no caminho de redução do concreto ao abstrato, por meio da análise, e ascensão do abstrato ao concreto por meio da síntese.

O experimento, em caráter investigativo, foi realizado durante uma tarde (das 13h15min às 17h30min), no início do ano letivo de 2021, com quatro estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola da Rede Pública Estadual de Educação, localizada no sul de Santa Catarina, Brasil, que optaram por aulas remotas, por conta da pandemia causada pelo coronavírus, SARS-CoV-2. A comunicação entre a professora/pesquisadora e os estudantes colaboradores da pesquisa foi realizada apenas via plataforma digital *Classroom*, do *Google Meet*. Tínhamos a plataforma disponível apenas uma tarde para a realização da pesquisa.

A comunicação com os estudantes ocorreu nas formas oral e escrita, por meio de *slides* compartilhados em tela. Portanto, a fonte dos dados de pesquisa consiste nas respostas dos estudantes, nas formas oral e escrita, registradas pela própria plataforma. Por conseguinte, a plataforma se constituiu em instrumento para a coleta de dados.

Para análise, procedemos à transcrição na íntegra do experimento e selecionamos cenas que refletem alguns indícios de movimento de pensamento correspondente a cada ação de estudo da tarefa em referência. O procedimento de análise foi sustentado nos pressupostos teóricos da Atividade Orientadora de Ensino e Teoria do Ensino Desenvolvimental.

A fim de preservar a identidade dos estudantes que participaram da pesquisa, nós os identificamos pela letra inicial da palavra estudante (E), seguida de um número: E1, E2, E3, e E4. E as falas da professora pesquisadora são identificadas pelas letras PP.

Na especificidade do conceito de fração, amparamo-nos em Caraça (1951), Freitas (2016), Santos (2017) e Rosa e Marcelo (2022). Tomamos o concreto como ponto de partida e de chegada e o abstrato como elo de ligação entre estes dois polos contrapostos.

No concreto ponto de partida, no concreto sensorialmente percebido, tomamos como referência as relações entre grandezas contínuas de comprimento, com base na necessidade que deu origem à fração: medição de uma grandeza na qual a unidade de medida não cabia uma quantidade inteira de vezes (CARAÇA, 1951). Para desencadear as reflexões sobre essa necessidade, consideramos uma situação vivenciada atualmente pela humanidade, conforme segue:

HISTÓRIA VIRTUAL DO CONCEITO

Distanciamento social na volta às aulas presenciais

Olá, estudantes, tudo bem?

O pessoal dos serviços gerais lá da escola está muito feliz, pois finalmente voltaremos às aulas presenciais.

Uma das recomendações para que esse retorno ocorra de forma mais segura é que cada carteira fique um metro e meio de distância da outra. O pessoal dos serviços gerais precisa deixar as carteiras organizadas.

Os fiscais da vigilância sanitária deixaram marcado, no chão do corredor, o comprimento de um metro e meio, que é a distância que deverá ficar entre uma carteira e outra.

Porém, a escola não possui instrumentos de medida padronizados, como metro, trena, entre outros.

Há, na escola, apenas um pedaço de barbante, bem menor que o comprimento marcado no chão do corredor.

Para evitar o contato com outras pessoas, por causa da Covid-19, a equipe responsável por organizar as carteiras decidiu medir a distância entre as carteiras com o pedaço de barbante disponível. Porém, também não sabem quanto mede o barbante e não têm instrumentos de medida para medi-lo.

Eles não sabem como fazer com o barbante para deixar a distância entre as carteiras igual àquela distância marcada pela vigilância sanitária, pois o barbante não coube um número inteiro de vezes no comprimento da distância marcado no corredor.

Escreva uma carta com a orientação, ao pessoal dos serviços gerais, de como eles deverão proceder para medir a distância entre uma carteira e outra, com a utilização de apenas o barbante que tem na escola.

Tente explicar de forma mais detalhada e completa possível.

Aguardo sua resposta!

Juliana

Fonte: Elaboração nossa, a partir de Rosa e Marcelo (2022).

O problema desencadeador implícito na carta que se constituiu em fio condutor das reflexões com os estudantes foi: como o pessoal dos serviços gerais poderá proceder para medir a distância entre uma carteira e outra, com adoção apenas do barbante disponível na escola? No processo de busca por sua solução, percorremos o movimento sugerido por Davídov (1988) para o desenvolvimento das quatro ações de estudos.

RESULTADOS

A seguir, em consonância com o método de análise, apresentamos, em unidade, os resultados da pesquisa no contexto do sistema de ações no qual foram coletados.

PRIMEIRA AÇÃO DE ESTUDO: revelação da relação geneticamente inicial do procedimento geral de solução.

É importante destacar que nosso foco consiste em revelar o procedimento geral de solução ao problema desencadeador, independentemente do tamanho de barbante. A formação do deste procedimento passa pela revelação de sua base genética, de sua relação essencial, universal. Mas, quais elementos constituem tal relação? E como revelá-la durante o processo de ensino e aprendizagem?

Iniciamos o desenvolvimento do experimento didático com a leitura da carta, em voz alta, pelos estudantes. Dois deles participaram da leitura. Na sequência, desencadeamos as reflexões a partir dos seguintes questionamentos (Cena 1):

Cena 1 – Revelação da relação geneticamente inicial do procedimento geral de solução

PP: Vocês compreenderam a carta?

TODOS: Sim.

PP: Qual é o problema para o qual precisamos encontrar uma solução?

E4: Como medir a distância entre uma carteira e outra com o barbante?

PP: Qual a grandeza vamos considerar?

TODOS: Distância entre as carteiras.

PP: O comprimento da distância entre as carteiras. E qual instrumento será utilizado para medir o comprimento?

E1: Barbante.

PP: Quanto mede o barbante?

TODOS: Não sabemos.

PP: Quanto mede a distância entre as carteiras com a unidade de medida composta por um barbante?

TODOS: Não sabemos.

PP: Podemos representar essa medida desconhecida por uma letra?

TODOS: Sim.

E4: Pela letra D, de dado.

PP: Por que D?

E4: Porque D é a distância entre as carteiras.

PP: Então podemos utilizar a letra D?

TODOS: Sim.

PP: E podemos utilizar a letra B para representar a unidade de medida básica (comprimento do barbante)?

TODOS: Sim.

Fonte: Acervo do TedMat (2021).

A compreensão do problema desencadeador passa pela identificação da grandeza a ser medida (comprimento da distância entre uma carteira e outra) e da unidade de medida básica (comprimento do barbante). Inicialmente, estes dois elementos foram representados nos *slides* na forma objetal, por meio de desenhos concretamente dados aos órgãos dos sentidos (aos olhos).

Diferente do modo de organização do ensino de Matemática tradicionalmente desenvolvido no Brasil, no qual o ponto de partida geralmente consiste nas significações aritméticas, partimos das significações geométricas por meio da necessidade historicamente vivenciada pela humanidade de medir grandezas. Medir consiste em “comparar duas grandezas da mesma espécie – dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc.” (CARAÇA, 1951, p. 29).

A medição de grandezas é a principal base prática da fração (ROSA; MARCELO, 2022). Como afirma Kopnin (1978, p. 169-170), “a importância da prática é multilateral no movimento do pensamento: ela é a base do pensamento, determina-lhe o fim e atua como critério da verdade. Todos esses aspectos da prática na sua relação com pensamento”. A partir da representação objetal, iniciamos um processo de abstração dos elementos envolvidos, conforme a figura 1.

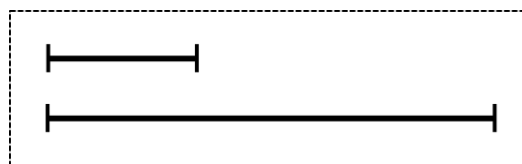


Figura 1 - Representação geométrica. Fonte: Elaboração nossa (2021).

Abstraímos as carteiras, a textura e a cor do barbante. A representação geométrica (Figura 1) no *slide*, dos dois comprimentos envolvidos, expressa o primeiro

movimento de abstração da forma objetual para a gráfica. A representação gráfica, assim como a objetual, ainda é sensorialmente dada.

No processo de formação do conhecimento, o concreto sensorial é ponto de partida do pensamento para atingirmos as representações mais abstratas (DAVÍDOV, 1982). Na Cena 1, quando questionamos se poderíamos representar as medidas desconhecidas com uma letra, expusemos a gráfica (Figura 1) no *slide*. Após a inclusão das letras, a imagem do *slide* ficou assim constituída (Figura 2).

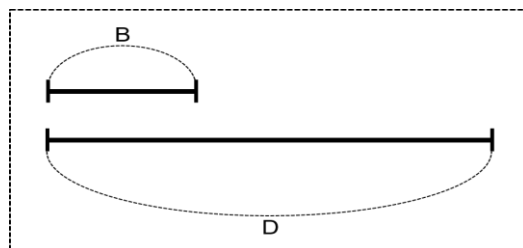


Figura 2 - Introdução da representação algébrica. Fonte: Elaboração nossa (2021).

Atingimos um novo movimento de abstração, agora por meio de letras. Este procedimento só foi possível graças à generalização. Aqui, os valores B e D podem assumir quaisquer valores aritméticos, portanto, são valores gerais.

A interconexão dos dois elementos (B e D) generalizados e abstraídos anteriormente, nas formas gráfica e literal, é revelada por meio da introdução de um terceiro elemento, conforme ocorre na sequência.

SEGUNDA AÇÃO DE ESTUDO: modelação da relação essencial.

Na segunda ação de estudo, ocorre a modelação da relação geneticamente inicial. De acordo com Davídov (1988, p. 182), “os modelos de estudo são o elo internamente imprescindível no processo de assimilação dos conhecimentos teóricos e procedimentos generalizados de ação”. No entanto, não é qualquer representação algébrica que pode ser considerada como modelo de estudo, somente aquelas que fixam com precisão as conexões internas à “relação universal de determinado objeto integral e garante uma análise posterior” (DAVÍDOV, 1988, p. 182). O conteúdo dos modelos de estudo fixa as particularidades internas do objeto, “não observáveis de maneira direta. O modelo de estudo, como produto da análise

mental, pode ser depois um meio especial da atividade mental humana” (DAVÍDOV, 1988, p. 333).

A relação essencial (universal), expressa na forma geral por meio do modelo algébrico, não surge como representação direta de uma situação singular concretamente dada. Neste estágio do movimento de abstração e generalização, não trabalhamos mais com a expressão objetal de duas carteiras e o barbante desenhada no *slide*, mas com a representação gráfica dos elementos que realmente constituem a relação essencial (os comprimentos envolvidos), por meio de elementos geométricos (segmentos) e algébricos (letras). Percorremos, portanto, um movimento de sucessivas abstrações.

A modelação gráfica, por meio dos segmentos, ainda tem alguma relação com a aparência dos objetos singulares que lhe deram origem. Por isso, constituem-se ricos elementos mediadores entre a representação concretamente dada e a representação algébrica.

Dentre as diversas representações espaciais específicas da Matemática, consideramos a reta numérica de grande relevância do ponto de vista didático, por possibilitar que os estudantes observem o movimento operacional com os números em seu contexto geométrico.

Durante a realização do experimento com os estudantes, quando a figura 2 ainda estava exposta no *slide*, questionamos quantas vezes a unidade de medida B cabia na medida D. Por estimativa, todos responderam que caberia três vezes. Em seguida, pedimos a eles para verificar se o resultado seria realmente este por meio da medição no próprio *slide*. Cada unidade de medida sobreposta, no comprimento da distância entre as carteiras, era registrada na reta numérica (Cena 2).

Cena 2 – Introdução do terceiro elemento da relação essencial

PP: Quando medimos nenhuma vez, que número vamos registrar na reta numérica?

E1: 0 (zero).

PP: Quando medimos uma vez, que número vamos registrar na reta numérica?

TODOS: 1 (um).

PP: Quando medimos duas vezes?

E3: 2 (dois)

PP: E quando medimos três vezes?

TODOS: 3 (três)

PP: Quantas vezes a unidade de medida básica coube no comprimento da distância entre uma carteira e outra?

TODOS: 3 (três).

Fonte: Acervo do TedMat (2021).

Essa resposta (três) exprime o resultado da medição. Como afirma Caraça (1951, p. 31), a resposta para a pergunta “quantas vezes cabe um comprimento noutra” consiste no resultado da comparação da grandeza em medição com a unidade de medida. Desse modo, os números são um reflexo de propriedades definidas das coisas reais.

Durante o processo de medição, introduzimos as significações aritméticas (0, 1, 2 e 3). O resultado da medição consiste no terceiro elemento que constitui a relação essencial. Ao término da cena 2, concluímos também o registro da medição, na reta numérica (Figura 3).

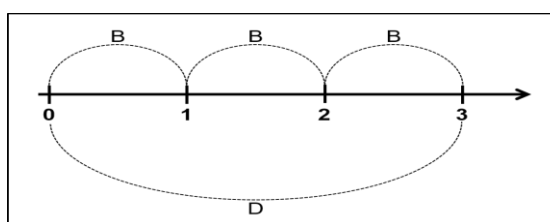


Figura 3 - Modelo gráfico. Fonte: Elaboração nossa (2021).

Tendo por base a figura 3, exposta no *slide*, questionamos quantas vezes a medida B caberia na grandeza com medida D. Ou seja, a medida D seria igual a quantos B? As respostas dos estudantes refletiam as relações de multiplicidade e divisibilidade que, traduzidas para a linguagem matemática, configuram três modelos particulares: $D = 3B$; $\frac{D}{B} = 3$; $\frac{D}{3} = B$. São modelos particulares porque são válidos só para os casos em que a medida básica cabe três vezes na grandeza em medição.

Questionamos como fazer para que esses modelos fossem válidos também para os casos em que a unidade de medida couber cinco vezes, seis vezes... enfim, para qualquer quantidade de vezes. Os estudantes nos responderam que bastava colocar uma letra no lugar do número três. Optamos pela letra n , conforme segue: $D = nB$; $\frac{D}{B} = n$; $\frac{D}{n} = B$.

Desse modo, atingimos a abstração e a generalização substancial da relação essencial, escrita em sua forma geral, portanto válida para qualquer relação entre duas grandezas. Trata-se, pois, de uma representação puramente abstrata e generalizada, mas que teve sua origem no mundo real.

Concluímos o processo de modelação da relação geneticamente inicial do procedimento geral de solução, por meio do procedimento de redução do concreto real-

sensorial ao abstrato. A partir dessa abstração, será possível deduzir o procedimento geral de solução pelo procedimento de ascensão de abstrato ao concreto.

TERCEIRA AÇÃO DE ESTUDO: transformação do modelo da relação essencial.

Na terceira ação de estudo, iniciamos o movimento de ascensão do abstrato ao concreto. O modelo transformado contém em si as relações de multiplicidade e divisibilidade interiormente generalizadas e abstraídas. Porém agora será revelado um elemento mediador no processo de medição: a unidade de medida intermediária.

Quando o processo de análise adentra na essência e atinge a abstração substancial, é possível, na terceira ação de estudo, deduzir o procedimento geral de solução, com base na relação geneticamente inicial, por meio da transformação do modelo. Isso porque o resultado da redução tem que garantir a dedução, por meio do movimento de ascensão do abstrato ao concreto. “A concretização dos conhecimentos teóricos consiste na dedução e explicação das manifestações particulares e singulares do sistema integral, a partir de seu fundamento universal” (DAVÍDOV, 1988, p. 155).

As reflexões até então realizadas são insuficientes para resolver o problema desencadeador, uma vez que, conforme enunciado da história virtual, o barbante não coube um número inteiro de vezes no comprimento da distância marcada no chão do corredor. Para desencadear a necessidade de transformação do modelo, supomos uma situação em que o comprimento da distância (D) entre uma carteira e outra é maior que dois e menor que três barbantes, além disso, expusemos a seguinte imagem no *slide* (Figura 4).

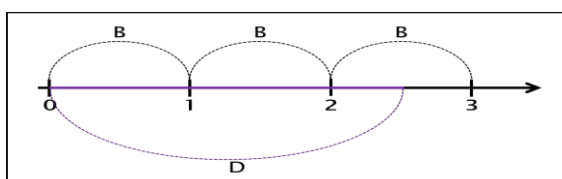


Figura 4 - Necessidade de transformação do modelo. Fonte: Elaboração nossa (2021).

Na suposição apresentada na figura 4, a unidade de medida básica coube duas vezes inteiras e mais uma parte dela. O resultado da medição não são dois e nem três barbantes. Ou seja, não é um número natural, portanto sua solução passa pela transformação do modelo. Questionamos os estudantes quantas partes da unidade coube na terceira aplicação do barbante sobre o comprimento em medição. Os estudantes responderam que a

metade. Explicamos que representaríamos a metade na forma fracionária por $\frac{1}{2}$, pois dividimos o barbante em duas partes e tomamos uma destas partes: uma metade.

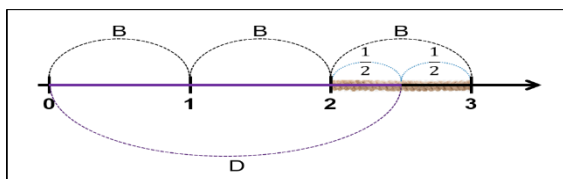


Figura 5 - Transformação do modelo. Fonte: Elaboração nossa (2021).

Com a subdivisão da unidade de medida básica (B) introduzimos a unidade de medida intermediária (Figura 5) e, conseqüentemente, a fração expressa aritmeticamente $\left(\frac{1}{2}\right)$. Explicamos aos estudantes que, de acordo com Caraça (1951, p. 36), “o número $\frac{m}{n}$ diz-se, em qualquer hipótese, racional – ao número m chama-se numerador e ao número n denominador”. A introdução do número fracionário, a partir da medição, possibilitou a revelação do significado de sua constituição, conforme indica a cena 3.

Cena 3 – Introdução da fração

PP: A subdivisão da unidade básica em duas partes é suficiente para fazer a medição?

TODOS: Sim.

PP: Como é que se representa a metade?

E2: Um meio.

PP: Por quê?

E3: Porque pegou o barbante e dividiu em duas partes.

PP: Por que um sobre dois $\left(\frac{1}{2}\right)$?

E3: Dois, porque foi dividido em duas partes e um representa a parte que coube.

Fonte: Acervo do TedMat (2021).

A transformação da unidade de medida básica deu origem à unidade de medida intermediária. Nesse contexto de transformação, a partir da mesma relação essencial de multiplicidade e divisibilidade abstraída e generalizada nas duas ações anteriores, é que a fração é revelada. Assim, a fração aparece como manifestação da medição.

Tínhamos como tarefa, introduzir os estudantes na esfera das relações entre grandezas contínuas reais, dadas sensorialmente, com vistas à formação da compreensão da gênese da fração como derivada do processo de medição de comprimento. Após as reflexões expressas na cena 3, abstraímos e generalizamos a unidade de medida intermediária para $\frac{1}{j}$. Assim, a unidade de medida básica pode ser subdividida para qualquer valor. Se for subdividida

em quatro partes iguais, por exemplo, teremos que a unidade de medida intermediária será $\frac{1}{4}$ ($j = 4$) e, assim, sucessivamente.

O movimento do processo de solução da tarefa de estudo difere-se daquele tradicionalmente desenvolvido no modo de organização de ensino predominante no Brasil, cuja referência é tarefas particulares soltas, fragmentas, ou seja, sem interconexão uma com a outra. De acordo com Santos (2017), de modo geral, a fração é introduzida a partir da contagem de fatias de pizzas, pedaços de chocolates, entre outros. Geralmente, não se considera a medição com base na interconexão entre as relações de multiplicidade e divisibilidade. No modo de organização de ensino brasileiro, tanto o número natural quanto o número racional, geralmente, são abordados por meio da contagem de grandezas discretas, em detrimento da medição de grandezas contínuas (FREITAS, 2016).

O objetivo final do conceito, em nível teórico, é “a síntese das mais diversas ideias, o resultado de um longo processo de conhecimento” (KOPNIN, 1978, p. 191). A síntese consiste no ponto de chegada do movimento de redução do concreto ao abstrato, conforme ocorre na quarta ação de estudo.

QUARTA AÇÃO DE ESTUDO: síntese do procedimento geral de solução.

O concreto ponto de chegada consiste na síntese das abstrações e generalizações reveladas nas ações anteriores. Deste modo, na quarta ação de estudo, o pensamento dos estudantes reconstitui, com orientação do professor, o procedimento geral de solução como: unidade concreta, uma diversidade na unidade, uma combinação de diversas determinações.

Neste sentido, cabe questionar: se a síntese não é uma simples junção das partes, como reconstituir a unidade da relação geneticamente inicial com o modelo transformado? Diante desse desafio, a partir das orientações apresentadas por Santos (2017), conduzimos a elaboração da síntese coletiva tal como propõe Moura (2017). Na sequência, sugerimos que todo os estudante registrassem, em seu respectivo caderno, a síntese que foi elaborada coletivamente. Como são todas iguais, optamos, a título de ilustração, por um tom mais forte para facilitar a leitura (Figura 6):

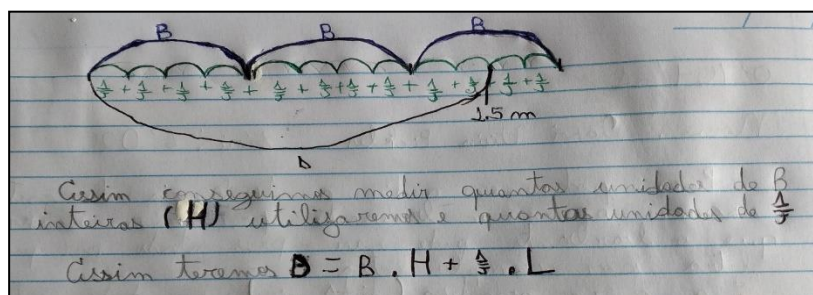


Figura 6 - Concreto como síntese coletiva. Fonte: Registro da síntese coletiva por E3 (2021).

No processo de síntese coletiva atingimos o modo geral de solução ao problema desencadeador $(D = B \times H + \frac{1}{j} \times L)$, conforme segue: a medida do comprimento da distância entre as carteiras (D) será obtida pelo produto da unidade de medida básica com a quantidade de unidades de medida básica que foi utilizada inteira (H), adicionado ao produto da quantidade de vezes que a unidade básica foi subdividida $(\frac{1}{j})$ pela quantidade de vezes que a unidade intermediária se repete (L). Ou seja, a organização do ensino, a partir do experimento didático-desenvolvimental, realizado por meio da situação desencadeadora de aprendizagem, favorece reflexões e sínteses coletivas em nível teórico.

De acordo com Moura (2017, p. 115), a aprendizagem “é resultado de uma síntese nova que se realiza ao se colocar em relação aos conceitos já adquiridos”. Atingimos uma síntese nova (Figura 6), cuja referência é as relações anteriormente abstraídas. As abstrações são uma ferramenta valiosa para a vida prática e são constantemente aprimoradas devido às aplicações. Portanto, a prática “penetra do começo ao fim todo o processo de conhecimento” (KOPNIN, 1978, p. 170).

Diante da importância das aplicações práticas para o aprimoramento das abstrações no pensamento dos estudantes, o processo de concretização do conhecimento culmina com a elaboração e resolução de diversas tarefas particulares que podem ser resolvidas pelo procedimento geral de solução. Isso porque a solução da tarefa de estudo “é importante não só para o caso particular dado, mas para todos os casos do mesmo tipo” (DAVÍDOV, 1988, p. 179). No entanto, este último momento do movimento de ascensão do abstrato ao concreto foi inviabilizado devido ao limite de tempo para o desenvolvimento do experimento didático. Em síntese, o movimento de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto pode ser assim expresso (Figura 7):



Figura 7 - Movimento de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto em torno da essência Fonte: Elaboração nossa (2021).

No microciclo de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto (Figura 7), a ação de avaliação esteve presente do início ao fim do processo. A ação de avaliação em todos os estágios de solução da tarefa de estudo orienta as demais ações para o resultado final: assimilação do procedimento geral de solução ao problema desencadeador. A avaliação foi processual, formativa e diagnóstica. Durante o desenvolvimento das ações, os estudantes refletiam sobre seus erros e acertos, compreendiam as causas dos erros e buscavam estratégias para chegar à solução correta ao problema da Situação Desencadeadora de Aprendizagem.

Segundo Davídov (1988), o conteúdo do ensino devem ser os conhecimentos teóricos científicos. A base do ensino é o seu conteúdo. Para o autor, é do conteúdo que derivam os métodos e procedimentos para organização do ensino que tem como finalidade favorecer o processo de aprendizagem e desenvolvimento dos estudantes (Figura 8).

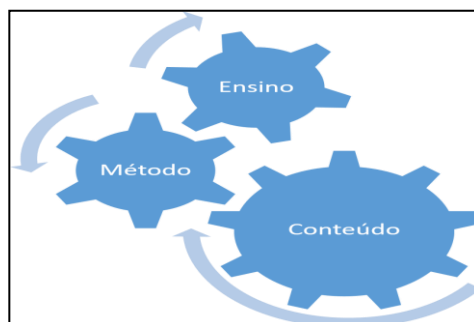


Figura 8 - Conteúdo como base. Fonte: Elaboração nossa (2021).

Na concepção de Vigotski (2001), o ensino realiza seu papel de orientação no desenvolvimento intelectual dos estudantes, principalmente, por meio do conteúdo dos

conhecimentos assimilados. Por isso, para organizar o experimento didático, tomamos como base o conteúdo em nível teórico do conceito de fração, tal como sugerem Freitas (2016), Santos (2017) e Rosa e Marcelo (2022).

É importante enfatizar que não estamos em defesa de um ensino conteudista, mas de um ensino rico em conteúdo teórico. Pois, é possível um ensino sem conteúdo? O que seria um ensino vazio de conteúdo? No entender de Rosa e Marcelo (2022), muitas proposições de ensino que se autointitulam inovadoras, apenas repetem o velho com uma aparência nova: o conteúdo permanece o mesmo, o empírico. De acordo com os autores em referência, as novas metodologias, as metodologias ativas, o uso das tecnologias, as metodologias que se dizem inovadoras de modo geral, ao se limitarem a reproduzir o conteúdo que de modo geral predomina no ensino brasileiro, desenvolvem nos estudantes apenas os conhecimentos empíricos sustentados na lógica formal tradicional. Para inovar é necessário, também, repensar o conteúdo de ensino.

É em torno da essência que conduzimos o pensamento dos estudantes no processo de ensino. A espiral que apresentamos (Figura 7), referente ao movimento de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto, é válida tanto para os conhecimentos empíricos quanto para os conhecimentos teóricos. A diferença consiste no conteúdo da essência. Enquanto nos conhecimentos empíricos a essência é abstraída e generalizada pela aparência externa de objetos e fenômenos, nos teóricos, vai além da aparência e adentra na essência.

O estudo da essência é infinito. Ao adentrar no conteúdo dos conhecimentos teóricos para organizar o ensino, tomamos como fio condutor a essência, cuja referência é sua base geneticamente inicial. A cada microciclo de redução e ascensão, essa essência se complexifica e dá origem a outros conceitos que, juntos, conformam um sistema conceitual (VIGOTSKI, 2001). Portanto, o desafio que se nos apresenta consiste em repensar os conteúdos de ensino e, com base neles, repensar os métodos e procedimentos para desencadear, nos estudantes, o processo de aprendizagem dos conhecimentos teóricos.

CONCLUSÕES

Desenvolvemos e analisamos um experimento didático-desenvolvimental, fundamentado no método dialético, objetivado na Teoria do Ensino Desenvolvimental e na Atividade Orientadora de Ensino.

No decorrer do experimento, constatamos participação ativa dos estudantes no desenvolvimento da tarefa de estudo, cuja referência foi uma situação desencadeadora de aprendizagem do tipo história virtual do conceito. Os estudantes manifestaram interesse e participaram ativamente no movimento coletivo de formação do procedimento geral de solução ao problema. Juntos, percorremos o caminho de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto.

Entendemos que a presente pesquisa contribuirá com as reflexões sobre as possibilidades de superação do modo de organização no qual predomina o conhecimento empírico. Consideramos que um movimento coletivo de reflexões nessa direção, é uma das ações necessárias para atingirmos a transformação educacional e social que almejamos. Conhecer, em nível teórico, é um ato de poder. Portanto, necessário se faz repensarmos a organização do ensino de modo que favoreça, aos escolares, a apropriação dos conhecimentos teóricos por meio do processo de aprendizagem orientado pelo professor. Tais conhecimentos propiciam, aos sujeitos que dele se apropriam, uma visão de mundo concreta, como síntese das múltiplas determinações.

REFERÊNCIAS

CARAÇA, B. D. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1955.

DAVÍDOV, V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**. Moscú: Editorial Progreso, 1988.

_____. **Tipos de generalización en la enseñanza**. 3. ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

FREITAS, D. **O movimento do pensamento expresso nas tarefas particulares proposta por Davýdov e colaboradores para apropriação do sistema conceitual de fração**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2016.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

MOURA, M. O. A objetivação do currículo na atividade pedagógica. Obutchénie. **Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**, v. 1, n. 1, p. 98-128, 2017. Disponível em: <http://www.seer.ufu.br/index.php/Obutchenie/article/view/38419>. Acesso em: 10 maio 2022.

MOURA, M. O.; ARAUJO, E. S.; SERRÃO, M. I. B. Atividade Orientadora de Ensino: fundamentos. **Linhas Críticas**, 24, 2019. Disponível em: <https://periodicos.unb.br/index.php/linhascriticas/article/view/19817>. Acesso em: 10 maio 2022.

MOURA, M. O. et al. Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. **Rev. Diálogo Educ.**, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, jan. /abr. 2010.

MOURA, M. O. et al. A Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. In: MOURA, M. O. (Org.). **A Atividade Pedagógica na Teoria Histórico-Cultural**. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2016. p. 93-125.

ROSA, J. E. da; M., F. de S.. Teoria do Ensino Desenvolvimental e Atividade Orientadora de Ensino na sistematização de numeração no contexto da formação inicial de professores. **Revista de Educação Matemática (REMat)**, São Paulo, v. 10, n. 10, p. 1-21, e022023, 2022, eISSN: 2526-9062. Disponível em: <https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/610/502>. Acesso em: 09 jun. 2022.

ROSA, J. E.; FONTES, M. S. Modo de organização do ensino de matemática à luz da teoria do ensino desenvolvimental. **Revista brasileira de educação - RBE**, v. 27, p. 1-26, 2022.

SANTOS, C. O. **O movimento conceitual de fração a partir dos fundamentos da lógica dialética para o modo de organização do ensino**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2017.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. Trad. P. Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

Revisão gramatical pelos próprios autores.

RECEBIDO 25 DE JUNHO DE 2022.

APROVADO EM 10 DE DEZEMBRO DE 2022.